PROPOSICIONES NUMERICAS

National Council of Teachers of Mathematics

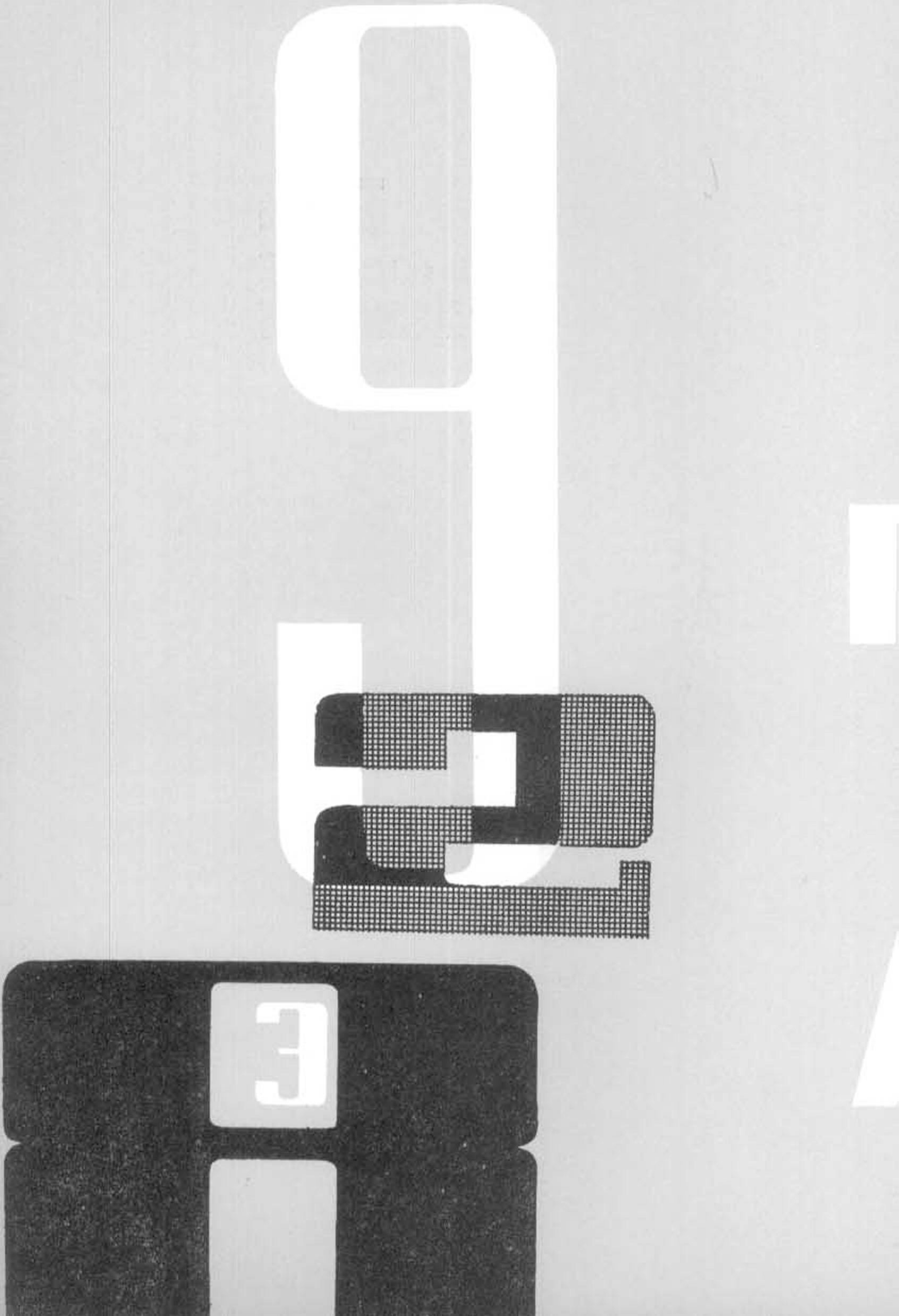
8. PROPOSICIONES NUMERICAS

El contenido de este cuaderno bien puede considerarse como una introducción al estudio de la lógica matemática. Trata brevemente lo que es el lenguaje de la matemática, las proposiciones verdaderas y las falsas para llegar después al concepto de proposición abierta en matemática. Hace hincapié en el empleo del eje numérico en las proposiciones numéricas. Estudia el concepto de conjunto solución y analiza en forma detallada la resolución de problemas.

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental y media, y alumnos de este último ciclo. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en esos grados. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo.

Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que consideran que las experiencias de aprendizaje transmitidas a los niños del ciclo elemental deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas, y para los alumnos de nivel medio y superior que deseen comprender más a fondo los conceptos básicos de la matemática tratados en cada uno de estos cuadernos. Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda auxiliar tanto a los maestros en

Temas
Colección de
matemáticas


9
2
3

8

Proposiciones numéricas

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.

traducción de
Federico Galván Anaya
profesor de matemáticas
de la U.N.A.M.

Editorial F. Trillas, S. A.
México 1968

Título de esta obra en inglés:
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet Number 8. Number Sentences

Tercera reimpresión en inglés: 1965

Primera edición en español: 1968

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prefacio

Este cuaderno es uno de la serie de ocho, escrita para maestros de enseñanza elemental más bien que para sus alumnos. Cada cuaderno comprende la exposición de un tema básico de matemáticas. Estos temas se hallan entre los que el maestro de enseñanza elemental necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en la escuela de ese grado. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo. El lector interesado debe estudiar el tema con mayor profundidad en otras obras.

Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que creen que las experiencias de aprendizaje, trasmitidas a los niños del ciclo elemental, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas. Muchos profesores han encontrado que su educación profesional no los prepara para enseñar aritmética de modo congruente con este punto de vista. Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda ser una ayuda para estos profesores, así como para otros que también están interesados en mejorar su instrucción.

Los títulos de los cuadernos de esta serie son:

Cuaderno 1. *Conjuntos*
Cuaderno 2. *Números enteros*
Cuaderno 3. *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4. *Algoritmos de las operaciones con números enteros*
Cuaderno 5. *Números y sus factores*
Cuaderno 6. *Números racionales*
Cuaderno 7. *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8. *Proposiciones numéricas*

Aconsejamos que, si es posible, los cuadernos sean leídos en el orden numérico correspondiente, con excepción del octavo (*Proposiciones numéricas*), que puede apartarse del orden citado.

Escribieron los cuadernos los miembros de un grupo de verano (Summer Writing Group) cuyos nombres se indican al final de este prefacio. El proyecto fue iniciado y patrocinado por el Comité Suplementario de Publicaciones del NCTM (The NCTM Supplementary Publications Committee) bajo la presidencia de Kenneth B. Henderson. Fue financiado por el NCTM.

Edwin F. Beckenbach
Helen Curran
Walter Fleming
Geraldine Green
Lola May
Marlene Schroeder
Margaret F. Willerding
William Wooton
Lenore John, *Coordinadora*

Indice

Proposiciones numéricas

Cuaderno 8

EL LENGUAJE DE LA MATEMATICA

Debido a su carácter abstracto, la matemática es útil en la resolución de problemas. Por ejemplo, la proposición numérica $4+2=6$ es una descripción matemática de situaciones físicas muy diferentes y sin relación. Un primer paso de utilidad en la resolución de problemas es aislar las condiciones del enunciado del problema y traducir estas condiciones al lenguaje matemático.

La naturaleza en extremo simbólica del lenguaje matemático lo hace útil como un auxiliar no sólo en la resolución de problemas, sino también en la formulación clara de enunciados de relaciones matemáticas. Los enunciados de las propiedades de un conjunto de números, tales como $a+b=b+a$ en que a y b son números enteros tienen obvias ventajas sobre enunciados verbales que expresen la misma idea. Por estas razones es conveniente escribir clara, correcta y precisamente las proposiciones matemáticas.

El lenguaje de las matemáticas dispone de símbolos equiparables a los nombres, verbos y frases, que es el medio de comunicación con palabras. Dispone, además, de símbolos similares a los signos de puntuación, que se emplean para aclarar el significado de una frase o proposición matemática.

Los símbolos propios de los sistemas de numeración para representar números se llaman *numerales.* Ejemplos típicos de numerales son 4, VII, 6 y 105. Hay también cuatro signos familiares $+$, $\times$, $-$, y $\div$, que indican las operaciones matemáticas de adición, multiplicación, sustracción y división. Un numeral puede constar de una combinación de símbolos que expresen números y signos de operaciones. La expresión 5×2 que combina símbolos que expresan números y el signo de multiplicación es un numeral que expresa al número 10. Algunos de los símbolos empleados para mostrar relaciones de orden entre los números son $=$, $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$. Estos símbolos se explicarán más adelante con todo detalle. Los paréntesis ( ), corchetes [ ], y llaves { } pueden considerarse símbolos de puntuación porque ayudan a esclarecer el significado de los enunciados y expresiones matemáticas. Cuando necesitemos simplificar una expresión, empecemos por preguntarnos cómo obtener las expresiones más simples para representar los números que se han de simbolizar en la expresión.

Los paréntesis indican que ciertos números están asociados y que la expresión comprendida en éste se considera símbolo representativo de un número. ¿Por qué son necesarios estos recursos? La expresión matemática:

$$5\times 4-2$$

puede significar

$$\begin{aligned}(5\times 4)-2&=20-2\\&=18,\end{aligned}$$

también puede significar

$$\begin{aligned}5\times(4-2)&=5\times 2\\&=10.\end{aligned}$$

A falta de paréntesis escrito o tácito, $5\times 4-2$ no puede considerarse como un numeral, porque no puede determinarse el número que representa.* Empleando el paréntesis en la primera expresión se evita confundir cuál es la asociación requerida. Obsérvese, además, que la expresión completa, $(5\times 4)-2$ es un numeral que representa a un número, en este caso 18.

Los corchetes [ ] también se toman como signos, por tratarse de otra especie de paréntesis. Si se emplea un par de signos de agrupación en una expresión matemática, un par diferente puede emplearse para mostrar una agrupación distinta y la parte de la expresión contenida en este segundo par se considera como expresión de un solo número. Si vamos a simplificar una expresión que comprenda paréntesis y corchetes, efectuamos primero la operación indicada dentro del par interior de signos de agrupación y después usamos su resultado para efectuar las operaciones dentro del par exterior de signos de agrupación. Por ejemplo, obtener una expresión simple para el numeral $[(6+2)+(3\times 5)]-9$, podemos simplificar esta expresión matemática como sigue:

$$\begin{aligned}[(6+2)+(3\times 5)]-9&=[8+15]-9\\&=23-9\\&=14.\end{aligned}$$

Por tanto, la expresión representa el número catorce.

* Generalmente se conviene en que "la multiplicación y la división tienen preferencia respecto a la adición y la sustracción." De acuerdo con esto puede considerarse que $5\times 4-2$ significa $(5\times 4)-2$.

Si aún es necesario hacer una nueva agrupación y ya hemos usado paréntesis y corchetes, podemos emplear llaves { }, se entenderá por el contexto los casos en que la expresión dentro de las llaves no es una lista de los miembros de un conjunto. Para simplificar una expresión que contenga llaves, corchetes y paréntesis, empecemos por efectuar primero las operaciones indicadas dentro de los signos internos de agrupación para proseguir hacia afuera y efectuar las operaciones incluidas en el siguiente par de signos de agrupación y, por último, empleemos estos resultados para ejecutar las operaciones incluidas en el par exterior, o sea, procedemos de adentro hacia afuera. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\{12+[(3\times 2)-4]\}-(4\times 3) &= \{12+[6-4]\}-12\\ &= \{12+2\}-12\\ &= 14-12\\ &= 2.\end{aligned}$$

La expresión completa representa al número dos.

Las "rayas de quebrado" también sirven como signos de agrupación. Por ejemplo, en la expresión

$$\frac{3+7}{6},$$

La raya de quebrado agrupa los sumandos de la expresión $3+7$. Por tanto,

$$\frac{3+7}{6}=\frac{10}{6}.$$

Grupo de ejercicios 1

Escriba en la forma más simple que pueda, cada una de las siguientes expresiones:

Ejemplo: $$\begin{aligned}[3+(8-3)]+5 &= [3+5]+5\\ &= 8+5\\ &= 13\end{aligned}$$

1. $8+(7-6)+2$
2. $6+[3+(5-1)]-2$
3. $\{6+[5+(2+6)]\}+[2\times(1+3)]$
4. $\{4+[3\times(6-1)]+2\}+[3\times(2+1)]$

5. $\frac{7+3}{2}+\left(2+\frac{3+1}{2}\right)$

6. $\left\{\left(2+\frac{3+1}{2}\right) + [2\times(3-1)]\right\}+2$

ENUNCIADOS FALSOS Y VERDADEROS

En el lenguaje ordinario hay cuatro clases de oraciones: enunciativas, imperativas, interrogativas y exclamativas. Limitaremos nuestras consideraciones a sólo una de éstas, la oración enunciativa. Una oración enunciativa es una aseveración acerca de algo. Los siguientes son ejemplos de oraciones afirmativas:

En 1962, la reina de Inglaterra era Isabel II.
Hay más hombres que mujeres en este cuarto.
La suma de seis y siete es catorce.

La primera y la tercera de estas oraciones pueden ser calificadas de "verdaderas" o "falsas"; la primera es verdadera y la tercera es falsa. Decimos que tales oraciones tienen un *valor de verdad*, que puede ser "verdadero" en un caso y "falso" en el otro. Sin embargo, la segunda oración puede ser verdadera o falsa, dependiendo de cuál sea "este cuarto" y las personas que están dentro de él. Esta oración no tiene un valor de verdad, puesto que es imposible, de la información dada, determinar si es verdadera o falsa.

Las oraciones semejantes a la primera y a la tercera del ejemplo anterior, que tienen valor de verdad, se llaman *enunciados*. Las oraciones semejantes a la segunda que no tienen valor de verdad, pero que lo tendrían si los nombres indefinidos o los pronombres fueran reemplazados por nombres definidos, satisfactorios, se llaman *proposiciones abiertas*.

Algunas proposiciones numéricas son enunciados. Por ejemplo:

$6+4=10$ es un enunciado verdadero, mientras que

$7+3=12$ es un enunciado falso.

En el lenguaje de la matemática es necesario un símbolo para las palabras o expresiones verbales para poder formar una proposición numérica completa. El signo $=$, equivale a las expresiones verbales "igual", "es igual a", "expresa el mismo número que", "es lo mismo que" o (cuando relaciona conjuntos) "tiene los mismos miembros que". Una proposición numérica que contenga este signo se llama *ecuación.* En matemáticas hay otros símbolos para expresiones verbales. En el ejemplo $2<5$, el símbolo $<$ se lee "es menor que". En una proposición numérica verdadera, el vértice del signo apunta hacia el menor de los dos números que se comparan. La proposición numérica $2<5$ (léase dos es menor que cinco) es verdadera. La proposición numérica $9<5$ (léase nueve es menor que cinco) es un ejemplo de una proposición numérica falsa. En la proposición numérica $6>5$, el símbolo $>$ se lee "es mayor que". La proposición numérica $6>5$ (se lee seis es mayor que cinco) es verdadera. Nótese nuevamente que en este enunciado verdadero el vértice del símbolo $>$ también apunta al menor de los dos números comparados. La proposición numérica $7>10$ (léase siete es mayor que diez), es una proposición falsa. Una proposición numérica ligada por el signo $<$ o $>$ se llama *desigualdad.*

Puesto que un enunciado es una proposición ya verdadera o ya falsa (pero no ambas condiciones a la vez), entonces, un enunciado falso puede hacerse verdadero agregándole o quitándole en el lugar correspondiente una palabra o frase negativa tal como "no". También es posible cambiar un enunciado verdadero a falso mediante la sustitución apropiada de una palabra negativa. La oración: "El señor Smith es presidente de los Estados Unidos de América" es falsa. Pero agregando la palabra "no" la oración se torna en verdadera: "El señor Smith no es presidente de los Estados Unidos de América." Esta misma técnica puede emplearse en las proposiciones numéricas. En el lenguaje de la matemática, el símbolo equivalente a la palabra "no" es la *barra inclinada, /,* cuando se sobrepone a un símbolo que significa una palabra o una expresión verbal. Los siguientes ejemplos muestran cómo se usa la barra inclinada:

PROPOSICIÓN	LÉASE	VALOR REAL
$7=4+2$	Siete es igual a cuatro más dos	Falso
$7\neq4+2$	Siete *no* es igual a cuatro más dos	Verdadero
$9<7$	Nueve es menor que siete	Falso
$9\nless7$	Nueve *no* es menor que siete	Verdadero
$10>7$	Diez es mayor que siete	Verdadero
$10\ngtr7$	Diez *no* es mayor que siete	Falso

Los símbolos de relación y sus equivalentes expresiones verbales que hemos estudiado aquí, son los siguientes:

SÍMBOLO	EXPRESIÓN VERBAL
$=$	Es igual a
	Es lo mismo que
	Expresa el mismo número que
$>$	Es mayor que
$<$	Es menor que
$\neq$	No es igual a
$\ngtr$	No es mayor que
$\nless$	No es menor que

Grupo de ejercicios 2

1. Cambie las siguientes expresiones verbales por proposiciones numéricas.

   a) Si restamos ocho de veinticuatro, el resultado es dieciséis.
   b) Dieciséis es mayor que diez.
   c) Diecisiete no es igual a la suma de ocho y dos.
   d) Ochenta es menor que veinte.
   e) Diez es el producto de tres por cuatro.
   f) Nueve es menor que once.
   g) Doce no es mayor que siete.
   h) La suma de veinte más seis es mayor que el producto de tres por ocho.

2. Indicar cuáles de las proposiciones del ejercicio 1 son verdaderas y cuáles son falsas.

3. Transcribir las siguientes proposiciones numéricas en expresiones verbales.

   a) $15+3=12-3$
   b) $4\times6>20$
   c) $18<10+15$
   d) $14\neq8+5$
   e) $17\ngtr11$
   f) $30-5\nless10+10.$

4. Indicar cuál de las proposiciones del ejercicio 3 es verdadera y cuál es falsa.

5. Diga cuál de los siguientes enunciados es verdadero y cuál es falso.

   a) Un enunciado puede ser verdadero y falso al mismo tiempo.
   b) $>$ Se lee "es mayor que".

c) $=$ Es un signo que en matemática significa "es lo mismo que".

d) / Es un signo que en matemática, cuando cruza un símbolo que representa una expresión verbal, significa *no.*

e) $<$ Es un signo que se lee "es menor que".

PROPOSICIONES ABIERTAS EN MATEMATICAS

La proposición: "Él fue el primer presidente de los Estados Unidos de América" ¿es verdadera o falsa? Es claro que en la forma en que está expresada no podemos afirmar. Es verdadera, si el nombre "Jorge Washington" sustituye al pronombre "él". Si este pronombre se reemplaza por el nombre Dwight D. Eisenhower, el enunciado es falso. La respuesta a la pregunta depende del nombre que reemplaza al pronombre "él". Tal proposición se llama *proposición abierta.*

De manera semejante, en matemáticas empleamos proposiciones que no tienen un *valor de verdad.* Un ejemplo de dichas proposiciones abiertas en matemáticas es

$$\square + 4 = 10.$$

El símbolo $\square$ está en lugar de un número definido, pero no especificado. Llamaremos *variable* a este símbolo. ¿La proposición anterior es verdadera? No podemos contestar hasta que el símbolo $\square$ se sustituya por un numeral. Si se sustituye por 3 resultará un enunciado falso. Si $\square$ se sustituye por 6, resulta un enunciado verdadero. Tal como está escrita la proposición

$$\square + 4 = 10$$

no tiene un valor de verdad y la llamamos entonces *proposición abierta. Una proposición que contenga una o más variables es una proposición abierta.* En este cuaderno, consideraremos proposiciones abiertas que sean proposiciones numéricas, esto es, proposiciones en que las variables representan números.

En la enseñanza elemental, los maestros usan muchas veces *figuras* tales como $\square$, $\triangle$, $\bigcirc$, o ✿ para representar variables. En los grados superiores se emplean de preferencia letras en lugar de figuras. Es de poca importancia usar una figura, una interrogación, una letra o sólo un espacio vacío, ya que lo importante, en realidad, es que el estudiante entienda que *el símbolo usado representa un número no especificado.* Puede, por tanto, escogerse arbitrariamente un símbolo para una variable.

El conjunto de números cuyos miembros son aquellos que pueden sustituir a la variable en una proposición numérica abierta, se llama *con-*

junto sustituyente o *dominio de la variable.* Del conjunto sustituyente se escoge el subconjunto de números que hacen verdadera la proposición. Este subconjunto se llama *conjunto solución* de la proposición; y cada número de este conjunto se dice que es una *solución* de la proposición abierta. (Véase el cuaderno 1, *Conjuntos*, para una discusión más amplia de conjuntos y subconjuntos.) En este cuaderno se empleará la letra mayúscula D para expresar al conjunto que sea el dominio de la variable.

Considérese la proposición:

$$(3\times n)+8=23, \qquad D=\{1, 3, 5, 7\}.$$

Obtengamos el conjunto solución para esta proposición mediante tanteos.

Sustituyendo n por 1: $(3\times 1)+8=23$
$3+8=23$
$11=23$ falso

Por tanto, 1 no es miembro del conjunto solución.

Sustituyendo n por 3: $(3\times 3)+8=23$
$9+8=23$
$17=23$ falso

Por tanto, 3 no es miembro del conjunto solución.

Sustituyendo n por 5: $(3\times 5)+8=23$
$15+8=23$
$23=23$ verdadero

Por tanto, 5 es miembro del conjunto solución.

Sustituyendo n por 7: $(3\times 7)+8=23$
$21+8=23$
$29=23$ falso

Por tanto, 7 no es miembro del conjunto solución.

Vemos que 5 es el único número del dominio de la variable de n para el que $(3\times n)+8=23$ es verdadera y, por tanto, el conjunto solución de la proposición es $\{5\}$.

Ahora consideremos la proposición

$$\triangle+2>17, \qquad D=\{15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Probemos 15: $15+2>17$
$17>17$

Ya que la proposición es falsa, 15 no es solución.

Probemos 16: $16+2>17$
$18>17$

Puesto que la proposición es verdadera, 16 es solución.

Probemos 17: $17+2>17$
$19>17$

Ya que esta proposición es verdadera, 17 es solución.

De igual modo, podemos demostrar que 18, 19 y 20 son soluciones; así, el conjunto solución de la proposición abierta es

$$\{16, 17, 18, 19, 20\}$$

En los dos ejemplos precedentes, tanto el dominio de la variable como el conjunto solución son conjuntos finitos. Los dos ejemplos que siguen tendrán como dominio un conjunto infinito.

Considere la proposición

$$w-4<6, \qquad D=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

(Los tres puntos indican que sólo parte del conjunto está en la lista y que ésta continúa indefinidamente de acuerdo con el modelo indicado.)

Esta es una proposición abierta en la que interviene la variable w. Además, consideraremos aceptables sólo aquellas sustituciones de w tales que $w-4$ sea un número entero. ¿Por qué número o números puede sustituirse w para que la proposición sea verdadera? Si w se sustituye por 10, tenemos que $10-4<6$. Esta proposición es falsa porque $6<6$ es falso. Si w se sustituye por 9, tenemos $9-4<6$. Esta proposición es verdadera porque $5<6$. Si w se sustituye por 8 tenemos $8-4<6$. Esta proposición es verdadera porque $4<6$. Si w se sustituye por 7 tenemos $7-4<6$. Esto es verdad porque $3<6$. ¿Puede verse que la proposición $w-4<6$ también es verdadera con 6, 5 y 4? Los números 3, 2, 1 y 0 no son soluciones, porque con estas sustituciones $w-4$ no es un número entero* (como acordamos anteriormente). Por ejemplo, $3-4$ no es un número entero. El conjunto solución es $\{9, 8, 7, 6, 5, 4\}$. Cuando una proposición abierta implica cualquiera de los símbolos $<$, $>$, $\leq$, o $\geq$, su conjunto solución contiene en general más de un número.

* Recuérdese que, en esos cuadernos, el hablar de enteros se refiere en general al conjunto de los enteros positivos y el cero. [N. del T.]

Ahora consideremos la proposición:

$$m+5>12, \qquad D=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Si m se sustituye por 7, el resultado es $7+5>12$, que es una proposición falsa.

Si m se sustituye por 8, el resultado es $8+5>12$, que es una proposición verdadera.

Si m se sustituye por 9, el resultado es $9+5>12$, que es una proposición verdadera.

¿Puede verse ahora que se obtiene una proposición verdadera si m se sustituye por un número mayor que 7? El conjunto solución es $\{8, 9, 10, \ldots\}$. Este conjunto es infinito.

El dominio de la variable en una proposición abierta puede ser un conjunto de números racionales. (Ver cuaderno 6, *Números racionales.*) Considérese la proposición:

$$6\div m<4, \qquad D=\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{8}{4}, \frac{7}{3}\right\}.$$

Si m se sustituye por $\frac{1}{2}$, tenemos $6\div \frac{1}{2} <4$, que es una proposición

falsa porque $6\div \frac{1}{2} = 12$.

Si m se sustituye por $\frac{5}{6}$, tenemos $6\div \frac{5}{6} <4$, que es una proposición

falsa porque $6\div \frac{5}{6} = \frac{36}{5}$.

Si m se sustituye por $\frac{8}{4}$, tenemos $6\div \frac{8}{4} <4$, que es una proposición

verdadera porque $6\div \frac{8}{4} = 3$.

Si m se sustituye por $\frac{7}{3}$, tenemos $6\div \frac{3}{7} <4$, que es una proposición

verdadera porque $6\div \frac{7}{3} = \frac{18}{7}$.

El conjunto solución de esta proposición es

$$\left\{\frac{8}{4}, \frac{7}{3}\right\}$$

Algunas veces, el conjunto solución es el conjunto vacío, esto es, ninguna sustitución de elementos del dominio dará una proposición verdadera.

Por ejemplo, consideremos la proposición

$$n+7=6,$$

en la que el dominio es el conjunto de números enteros. No existe ningún elemento del dominio tal que al sustituirlo por n, resulte una proposición verdadera, pues no hay número entero tal que cuando se añada a 7 resulte 6. Así que el conjunto solución de esta proposición es el conjunto vacío.

Enseguida aparece un sumario de los términos usados en esta sección.

1. Una *variable* es un símbolo usado para representar un determinado número o números no especificados.
2. Una proposición que contiene una variable, se llama *proposición abierta*. No tiene valor de verdad. Cuando la variable se sustituye por un número, la proposición resultante es verdadera o falsa.
3. El conjunto de números del que se toman valores para sustituir a la variable de una proposición abierta, se llama *conjunto sustituyente o dominio de la variable.*
4. Todo número del dominio (conjunto sustituyente) de la variable que hace verdadera a la proposición, cuando sustituye a la variable de una proposición abierta, es un *miembro* del *conjunto solución* de la proposición. Un conjunto solución puede contener un miembro, varios miembros o ningún miembro. De hecho, podemos tener un número infinito de miembros. Cada miembro del conjunto solución se llama *solución de la proposición abierta.*

Grupo de ejercicios 3

1. Transforme las siguientes proposiciones verbales en proposiciones matemáticas abiertas usando una letra o una figura para expresar a la variable.

   a) Seis más un número es igual a quince.
   b) La suma de dos y un número es mayor que diez.
   c) Veinte es menor que un número menos ocho.
   d) Un número menos nueve es mayor que veinticuatro.

2. Transforme las siguientes proposiciones matemáticas abiertas en proposiciones verbales.

   a) $8+k=22$ *c)* $\square+8>17$
   b) $14<\square-5$ *d)* $n-6\neq 13$

3. Para cada una de las proposiciones abiertas, obtenga el número o números que hagan verdadera a la proposición; esto es, obtenga el conjunto solución. El dominio de la variable es el conjunto de los números enteros, $W=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

a) $m-7=27$	*e)* [illegible] $-3=18$
b) $\square+5>12$	*f)* $\square+2=2$
c) $8<\triangle-2$	*g)* $m-5<10$
d) $4\times k>20$	*h)* $n+6>10$

Proposiciones abiertas equivalentes

Las proposiciones abiertas equivalentes son proposiciones abiertas que tienen el mismo conjunto solución. Las siguientes son proposiciones abiertas equivalentes:

$$3+n=9,$$
$$n=9-3,$$
y
$$3=9-n.$$

El conjunto solución de cada una de ellas es $\{6\}$.

Las proposiciones

$$n=5\times 3,$$
$$n\div 5=3,$$
y
$$n\div 3=5$$

son proposiciones equivalentes, porque cada una tiene $\{15\}$ como conjunto solución.

Las siguientes son proposiciones abiertas equivalentes:

$$\frac{1}{2}\times m=10,$$
$$m=2\times 10.$$

El conjunto solución para cada una de estas proposiciones es $\{20\}$.

Las siguientes son proposiciones abiertas equivalentes:

$$n\div\frac{4}{3}=12,$$
$$n=12\times\frac{4}{3}.$$

El conjunto solución de cada una de estas proposiciones es $\{16\}$.

Cuando se tiene una proposición verbal que ha de expresarse en lenguaje matemático, conviene tener presente que las condiciones del problema pueden representarse con varias proposiciones numéricas. Por ejemplo, considere este problema verbal:

> Juan tiene tres pesos. Quiere comprar un par de patines que cuesta nueve pesos. ¿Cuánto tiene que ahorrar para que compre los patines?

Supongamos que n es el número de pesos que Juan necesita ahorrar. Cada una de las siguientes es una expresión matemática de la condición que debe satisfacer:

$3+n=9,$ $\qquad$ $3=9-n,$

$n+3=9,$ $\qquad$ $9-n=3,$

$9=3+n,$ $\qquad$ $9-3=n,$

$9=n+3,$ $\qquad$ $n=9-3.$

Grupo de ejercicios 4

1. Escriba una proposición abierta equivalente a cada una de las siguientes proposiciones.

   a) $\square-264=928$ $\qquad$ *c)* $r+407=964$

   b) $437=n-89$ $\qquad$ *d)* $1\,007-3\,986-r$

2. Escriba una proposición abierta equivalente a cada una de las siguientes proposiciones.

   a) $n\times 57=1\,368$ $\qquad$ *c)* $\square\div 48=37$

   b) $2\,240\div z=35$ $\qquad$ *d)* $43=n\div 72$

PROPOSICIONES ABIERTAS COMPUESTAS

Considere estas dos oraciones simples:

María es maestra de escuela primaria.
María es buena cocinera.

Estas dos oraciones simples pueden combinarse para formar una oración compuesta. "María es maestra de escuela primaria *y* María es buena cocinera", es una oración compuesta. Cuando dos oraciones simples se unen con la conjunción copulativa *y*, la oración compuesta se define como verdadera si, y sólo si, *ambas* partes son verdaderas.

También podemos construir una oración compuesta cuando decimos: "María es maestra de escuela primaria, *o* María es buena cocinera." Cuando "o" interviene como conjunción disyuntiva, la oración se considera verdadera si, y sólo si, por lo menos una parte es verdadera. Si María es maestra de escuela primaria, pero no buena cocinera, entonces la primera oración compuesta (con la conjunción copulativa "y") es *falsa* y la segunda oración compuesta (con la disyuntiva "o") es *verdadera.*

Considere estas proposiciones numéricas compuestas:

a) $2<5$ y $10=2\times5$

$2<5$ es una proposición verdadera.

$10=2\times5$ es una proposición verdadera.

Entonces, la proposición numérica compuesta "$2<5$ y $10=2\times5$" es verdadera, porque ambas partes son verdaderas.

b) $2<5$ y $10=8$

$2<5$ es una proposición verdadera.

$10=8$ es una proposición falsa.

Entonces, la proposición numérica compuesta "$2<5$ y $10=8$" es falsa porque una de sus partes es falsa.

c) $5<10$ y $10<15$

$5<10$ es una proposición verdadera.

$10<15$ es una proposición verdadera.

Entonces la proposición numérica compuesta "$5<10$ ó $10<15$" es verdadera porque ambas partes son verdaderas. (En esta proposición, bastaría con que sólo una de las partes fuese verdadera.)

d) $5<10$ ó $5=2\times3$

$5<10$ es una proposición verdadera.

$5=2\times3$ es una proposición falsa.

Entonces la proposición numérica compuesta "$5<10$ ó $5=2\times3$" es verdadera porque una de sus partes es verdadera.

e) $6=5\times2$ ó $9>10$

$6=5\times2$ es una proposición falsa.

$9>10$ es una proposición falsa.

Entonces, la proposición numérica compuesta "$6=5\times2$ ó $9>10$" es falsa, porque ninguna de sus partes es verdadera.

Las proposiciones numéricas compuestas pueden ser tanto proposiciones abiertas compuestas como enunciados compuestos o combinación de éstos. Un ejemplo de proposición numérica compuesta abierta es

$$x<5 \text{ ó } x=5,$$

donde el dominio de la variable es el conjunto de los números enteros.

$x<5$ es una proposición verdadera si x es un miembro del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
$x=5$ es una proposición verdadera si x es un miembro del conjunto $\{5\}$.

La unión de los dos conjuntos, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, es el conjunto solución para la proposición "o" compuesta. (Véase cuaderno núm. 1: *Conjuntos,* para la discusión de "unión de conjuntos".) Es conveniente recordar que un número es una solución de una proposición "o" como $x<5$ o $x=5$ si, y sólo si, por lo menos una de las proposiciones simples es verdadera.

Una manera abreviada de escribir $x<5$ ó $x=5$ es

$$x\leq5,$$

que se lee "x es menor que 5 ó x es igual a 5". El símbolo $\leq$ puede considerarse como una combinación de los símbolos $<$ e $=$ donde $<$ se refiere a la parte de la proposición compuesta que es una proposición simple "menor que", y $-$ se refiere a la parte de la proposición compuesta que es una proposición simple "igual a".

Otro ejemplo de una proposición compuesta abierta es

$$x>5 \text{ ó } x=5$$

donde el dominio de la variable es el conjunto de los números enteros.

$x>5$ es una proposición verdadera si x es un miembro del conjunto $\{6, 7, 8, 9, 10 \ldots\}$.
$x=5$ es una proposición verdadera si x es un miembro del conjunto $\{5\}$.

La unión de los dos conjuntos, $\{5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots\}$, es el conjunto solución de la proposición "o" compuesta.

Una manera breve de escribir $x>5$ ó $x=5$ es

$$x\geq5,$$

que se lee, "x es mayor que 5 ó x es igual a 5". El símbolo $\geq$ puede considerarse como una combinación de dos símbolos $>$ e $=$, donde $>$ se refiere a la parte de la proposición compuesta que es una proposición simple "mayor que", y $=$ se refiere a la parte de la proposición compuesta que es una proposición simple "igual a". Un número es solución de una proposición "o" como en aquellas en las que intervenga o el signo $\leq$ o el signo $\geq$ si, y sólo si ese número hace verdadera por lo menos una de las proposiciones simples. Veamos algunos ejemplos de tales proposiciones.

EJEMPLO 1

Encuentre el conjunto solución de la proposición abierta:

$$\square+2\geq 10, \qquad D=\{6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Si $\square$ se sustituye por 6, la proposición dirá $6+2\geq 10$. Esta proposición "o" es falsa porque $6+2>10$ es falso y $6+2=10$ es falso.

Si $\square$ se sustituye por 7, la proposición dirá $7+2\geq 10$, que es falso, porque $7+2$ no es igual a 10 ni mayor que 10.

Si $\square$ se sustituye por 8, la proposición dirá $8+2\geq 10$, lo cual es verdadero porque $8+2=10$. Recuerde que una proposición compuesta "o" es verdadera si por lo menos una de sus partes es verdadera.

Si $\square$ se sustituye por 9, la proposición dirá $9+2\geq 10$, lo que es verdadero porque $9+2$ es mayor que 10.

Si $\square$ se sustituye por 10, la proposición dirá $10+2\geq 10$, lo cual es verdadero, porque $10+2$ es mayor que 10.

Luego, el conjunto solución es $\{8, 9, 10\}$.

EJEMPLO 2

Encuentre el conjunto solución de la proposición abierta:

$$7+x\leq 12, \qquad D=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Si x se sustituye por 3 la proposición dirá $7+3\leq 12$, lo que es verdadero, porque $7+3$ es menor que 12.

Si x se sustituye por 4, la proposición dirá $7+4\leq 12$, lo que es verdadero, porque $7+4$ es menor que 12.

Si x se sustituye por 5, la proposición dirá $7+5\leq 12$, lo que es verdadero porque $7+5=12$.

Si x se sustituye por 6, la proposición dirá $7+6\leq 12$, lo que no es verdadero, porque $7+6$ no es menor ni es igual a 12.

Si x se sustituye por 7, la proposición dirá $7+7\leq 12$, lo que no es verdadero, porque $7+7$ no es menor ni es igual a 12.

Si x se sustituye por 8, la proposición dirá $7+8\leq 12$, lo que no es verdadero, porque $7+8$ no es menor ni es igual a 12.

Luego, conjunto solución $=\{3, 4, 5\}$.

Ahora consideremos la proposición: "n es un número entero que está entre 5 y 8". Esta proposición asegura que n es mayor que 5 y menor que 8. Entre símbolos, la proposición se escribirá:

$$5<n<8, \qquad D=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Lo que se lee, "5 es menor que n, y n es menor que 8", o también n es mayor que 5 y menor que 8. ¿Puede verse que cuando n se sustituye por 6 o 7, la proposición resultante es verdadera? Cualquiera otra sustitución de n resulta una proposición falsa. Recordemos que una proposición compuesta "y" es verdadera sólo cuando ambas partes son verdaderas.

Ejemplo 3

Encuentre el conjunto solución de la proposición:

$$8<n<12, \qquad D=\{8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Si n se sustituye por 8, la proposición dirá $8<8<12$, lo que no es verdadero. El número 8 hace que una parte sea verdadera, pero no ambas partes de la proposición compuesta; $8<8$ es una proposición falsa, y $8<12$ es verdadera.

Si n se sustituye por 9, la proposición dirá $8<9<12$, lo que sí es verdadero, porque $8<9$ es verdad y $9<12$ es verdad.

Si n se sustituye por 10, la proposición dirá $8<10<12$, lo que es verdad.

Si n se sustituye por 11, la proposición dirá $8<11<12$, lo que es verdad.

Si n se sustituye por 12, la proposición dirá $8<12<12$, lo que no es verdad. Con el número 12, una, pero no ambas partes son verdaderas; $8<12$ es una proposición verdadera, pero $12<12$ es una proposición falsa.

El conjunto solución es $\{9, 10, 11\}$.

Nótese que el conjunto solución de la proposición $8<n$ es $\{9, 10, 11, 12\}$, y que el conjunto solución de $n<12$ es $\{8, 9, 10, 11\}$. El conjunto solución de la proposición compuesta "y" es la intersección de estos dos conjuntos soluciones. (Véase el cuaderno 1: *Conjuntos*, para la discusión de Intersección de conjuntos.)

En suma, una proposición "y" es verdadera si, y sólo si, ambas proposiciones simples de la proposición "y" son verdaderas.

Hemos considerado proposiciones "y" tales como $5<n<8$. También consideramos proposiciones "o" tales como $5\leq n$. Frecuentemente encontraremos situaciones que implican conjuntos de condiciones más complejas; por ejemplo, consideremos la proposición, "los aspirantes a este empleo deben estar entre las edades de 25 a 35 años inclusive". Supongamos que n representa el número de años de un candidato aceptable. Este candidato no será *menor de* 25 años ($25\leq n$) *y* no será *mayor de* 35 años ($n\leq 35$). Representamos esto con la proposición abierta compuesta:

$$25\leq n \quad \text{y} \quad n\leq 35,$$

que puede escribirse en forma abreviada

$$25\leq n\leq 35$$

(Léase "25 es menor o igual a n y n es menor o igual a 35", o también "n es mayor o igual a 25 y menor o igual a 35".)

Nótese que lo anterior equivale a

"$25<n$ ó $25=n$ y $n<35$ ó $n=35$."

Tenemos así una proposición compuesta con la copulativa "y", cada parte de la cual es también una proposición compuesta con la disyuntiva "o". Supóngase que sustituiremos dos veces a n en la proposición "o-y-o".

$$25\leq n\leq 35,$$

Probemos con 25. ¿Satisface 25 a las dos proposiciones ($25\leq n$ y $n\leq 35$) de suerte que resulten verdaderas? Sí; $25\leq 25$ es verdad porque $25=25$ y $25\leq 35$ es verdad, porque $25<35$. Entonces 25 es una solución.

Ahora probemos con 38 — ¿Satisface 38 a las dos proposiciones ($25 \leq n$ y $n \leq 35$) de suerte que resulten verdaderas? No. Aunque $25 \leq 38$ es verdad, $38 \leq 35$ no es verdad, porque ni $38 < 35$ ni $38 = 35$. Luego 38 no es una solución.

Podemos ver que tal proposición se considera verdadera cuando ambas partes de la proposición "y" son verdaderas.

EJEMPLO 4

Encuentre el conjunto solución de

$$5 \leq n \leq 8, \qquad D = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Si n se sustituye por 5 la proposición $5 \leq 5 \leq 8$. $5 \leq 5$ es verdadera porque $5 = 5$ es una proposición verdadera. $5 \leq 8$, es verdadera porque $5 < 8$ es una proposición verdadera. Entonces $5 \leq 5 \leq 8$ es verdad porque ambas partes de la proposición "y" son verdaderas. Luego 5 es un miembro del conjunto solución.

Si n se sustituye por 6, la proposición dirá $5 \leq 6 \leq 8$ lo que es verdadero porque $5 < 6$. $6 \leq 8$ es verdad porque $6 < 8$. Entonces, $5 \leq 6 \leq 8$ es verdad, porque ambas partes de la proposición "y" son verdaderas. Luego 6 es un miembro del conjunto solución.

Si n se sustituye por 7 la proposición dirá $5 \leq 7 \leq 8$. $5 \leq 7$ es verdadera, porque $5 < 7$. $7 \leq 8$ es verdadera porque $7 < 8$. Entonces $5 \leq 7 \leq 8$ es verdad porque ambas partes de la proposición "y" son verdaderas. Luego 7 es un miembro del conjunto solución.

Si n se sustituye por 8 la proposición dirá $5 \leq 8 \leq 8$. $5 \leq 8$ es verdadera porque $5 < 8$. $8 \leq 8$ es verdadera porque $8 = 8$. Entonces $5 \leq 8 \leq 8$ es verdad porque ambas partes de la proposición "y" son verdaderas. Luego 8 es un miembro del conjunto solución.

Si n se sustituye por 9, la proposición dirá $5 \leq 9 \leq 8$. $5 \leq 9$ es verdadera porque $5 < 9$. $9 \leq 8$, no es verdadera porque ni $9 < 9$ ni $9 = 8$. Entonces $5 \leq 9 \leq 8$ no es verdadera porque ambas partes de la proposición "y" deben ser verdaderas para que la proposición sea verdadera. Luego 9 no es miembro del conjunto solución.

Por tanto, el conjunto solución de la proposición es $\{5, 6, 7, 8\}$.

Grupo de ejercicios 5

1. Transforme las siguientes proposiciones verbales en proposiciones numéricas compuestas abiertas. Use cualquier figura o letra para representar la variable

   a) Un número es mayor o igual que nueve.
   b) La suma de trece y un número es menor o igual que 29.
   c) La suma de un número y once es mayor o igual que treinta.
   d) Ocho es menor que un número, y ese número es menor que quince.
   e) Un número está entre nueve y treinta inclusive.

2. Transforme las siguientes proposiciones numéricas compuestas abiertas, en proposiciones verbales.

   a) $n \leq 7$
   b) $\square + 2 \geq 3$
   c) $7 - x \leq 12$
   d) $2 < n < 5$
   e) $8 \leq t \leq 15$

3. Encuentre el conjunto solución de cada una de las siguientes proposiciones numéricas compuestas. El dominio de la variable es el conjunto de los números enteros $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

   a) $8 + \square \geq 10$
   b) $x + 2 \leq 5$
   c) $3 \times n \leq 9$
   d) $4 + \triangle \geq 12$
   e) $n - 7 \geq 14$
   f) $11 + k \leq 13$
   g) $4 < n < 6$
   h) $3 < n \leq 6$

PROPOSICIONES ABIERTAS CON DOS O MAS VARIABLES

Un niño estaba tratando de saber cómo podría escoger cuatro balones de una bolsa que contenía cuatro balones esféricos idénticos y cuatro balones ovales idénticos. ¿Cuáles son las posibles combinaciones entre las que puede escoger? Como en este problema intervienen dos clases de balones su representación mediante una proposición numérica contiene dos variables. Si los balones que el niño puede escoger se representan mediante ◯ los balones esféricos y ⬭ los ovales, entonces la proposición numérica del problema es

◯ + ⬭ = 4.

Debido a que hay dos variables, cada solución a este problema será un par ordenado* de números que producen una proposición verdadera, cuando las componentes del par ordenado sustituyen a las variables apropiadas. El conjunto sustituyente de cada variable es el conjunto {0, 1, 2, 3, 4}, del que el niño puede escoger 0, 1, 2, 3 ó 4 balones esféricos y 0, 1, 2, 3, ó 4 balones ovales. El conjunto solución de la proposición abierta

$$◯ + ⬭ = 4$$

es el conjunto de todos los pares ordenados tales que la suma de sus componentes es cuatro. En la proposición

$$◯ + ⬭ = 4,$$

si ◯ se sustituye por 0 resulta un enunciado verdadero si ⬭ se sustituye por 4. Entonces el par ordenado (0, 4) es una solución de (o un miembro del conjunto solución de) la proposición abierta.

Si ◯ se sustituye por 1, resulta un enunciado verdadero; si ⬭ se sustituye por 3. Entonces (1, 3) es una solución.

Si ◯ se sustituye por 2, resulta un enunciado verdadero; si ⬭ se sustituye por 2. Entonces (2, 2) es una solución.

Si ◯ se sustituye por 3, resulta un enunciado verdadero; si ⬭ se sustituye por 1. Entonces (3, 1) es una solución.

Si ◯ se sustituye por 4, resulta un enunciado verdadero; si ⬭ se sustituye por 0. Entonces (4, 0) es una solución.

Los miembros del conjunto solución pueden anotarse en un cuadro o en una notación de conjunto. (Véase cuadro 1.)

CUADRO I

◯	⬭
0	4
1	3
2	2
3	1
4	0

{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)}

* Recurra al cuaderno 1: *Conjuntos,* y al cuaderno 2: *Los números enteros,* para repasar el concepto de pares ordenados.

Hay 5 pares ordenados que hacen verdadera la proposición numérica. Debido a que las soluciones son pares ordenados, la solución (0, 4) no es la misma que (4, 0); ni es (1, 3) la misma solución que (3, 1). La solución (0, 4) representa cero balones esféricos y cuatro balones ovales, en tanto que la solución (4, 0) representa cuatro balones esféricos y cero balones ovales. Si el conjunto de números enteros es el conjunto sustituyente (dominio) de cada una de las variables de la proposición:

$$\square + \triangle + ✿ = 12.$$

Puesto que hay tres variables en esta proposición numérica, cada solución contiene tres números y puede considerarse como una tríade ordenada tal que la suma de sus componentes es doce. Hay muchas más soluciones de esta proposición numérica que las que tuvo la proposición anterior. Siete de las soluciones se anotan en el cuadro II. Como la suma es doce, no hay posibilidad de sustituir una de las variables por un número mayor que doce, puesto que en este caso no resultaría una proposición verdadera.

Si el conjunto de los números enteros es el dominio de cada una de las variables □ y △ en la proposición abierta:

$$(\square + \triangle) - \square = 6.$$

El mismo número debe sustituir a la variable □ en cada término en que aparezca esta variable en la proposición. Si △ se sustituye por 6, se tiene

Cuadro II

	□	△	✿
a)	5	4	3
b)	10	1	1
c)	12	0	0
d)	0	7	5
e)	0	5	7
f)	4	3	5
g)	1	10	1

una proposición verdadera sin que importe qué número entero se emplee como sustituto de $\square$. Por otro lado, si $\triangle$ se sustituye por otro número entero que no sea 6, resulta una proposición falsa, sin que importe qué número se emplee para sustituir a $\square$. El conjunto solución es infinito. Todos los pares ordenados tienen el número 6 como segunda componente. Algunas de estas soluciones aparecen en el cuadro III y el conjunto solución se representa mediante la notación de conjuntos al lado del cuadro.

Cuadro III

$\square$	$\triangle$
0	6
1	6
2	6
5	6
9	6
	6

$\{(0, 6), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), \ldots\}$

Si el dominio de cada una de las variables de la proposición numérica

$\triangle$ − ✿ = 0

es el conjunto de los números enteros, haciendo pruebas nos convenceremos de que en cada solución las dos componentes del par ordenado, son iguales y que el conjunto solución es infinito. Algunas de las soluciones

Cuadro IV

$\triangle$	✿
7	7
3	3
8	8
9	9
0	0

$\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), \ldots\}$

están representadas en el cuadro IV y el conjunto solución se expresa mediante la notación de conjuntos.

En la proposición de la figura 1, el dominio de cada una de las variables es el conjunto de números representados por los numerales que aparecen en la bolsa.

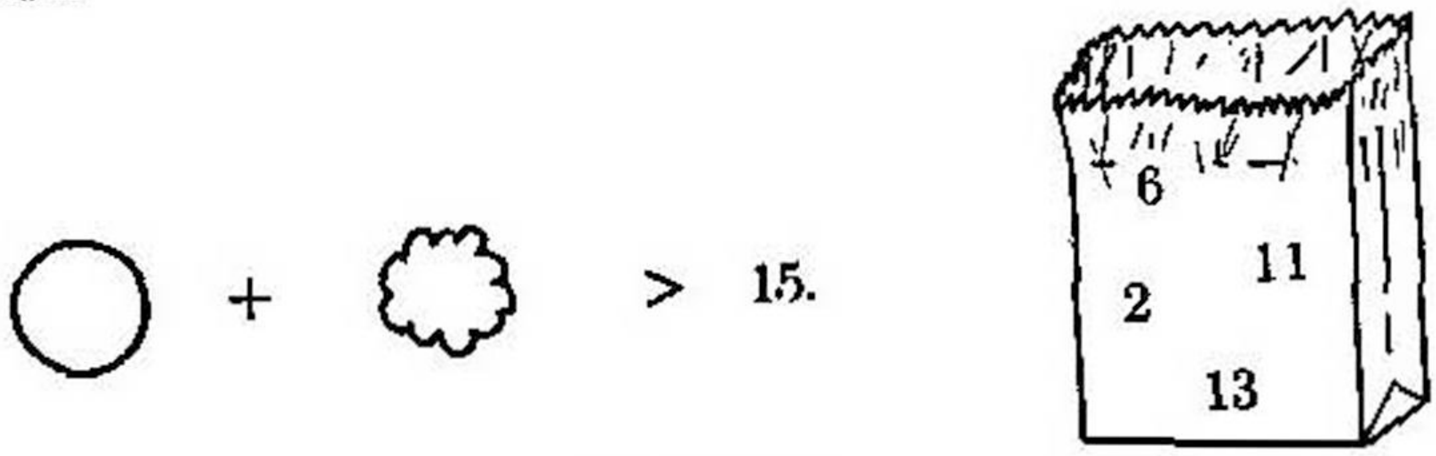


Figura 1

Una solución de esta proposición es un par ordenado de números enteros cuyas componentes pueden ser el mismo número o números diferentes. Algunas de las sustituciones de ○ y ✿ por las componentes de un par ordenado de números, dan proposiciones verdaderas (estos pares ordenados son soluciones), y otras dan proposiciones falsas. Las sustituciones se muestran en el cuadro V. Con la letra *T* se indican que esas proposiciones son verdaderas, y con *F* se indican las que son falsas.

Cuadro V

Si ○=2

○	✿	
2	2	F
2	6	F
2	11	F
2	13	F

Si ○=6

○	✿	
6	2	F
6	6	F
6	11	T
6	13	T

Si ○=11

○	✿	
11	2	F
11	6	T
11	11	T
11	13	T

Si ○=13

○	✿	
13	2	F
13	6	T
13	11	T
13	13	T

Todos los pares ordenados permisibles en estas proposiciones están anotados y el conjunto solución es:

{(6, 11), (6, 13), (11, 6), (11, 11), (11, 13), (13, 6), (13, 11), (13, 13)}.

Grupo de ejercicios 6

1. Usando el siguiente conjunto como dominio de cada variable, escriba en forma de cuadro los conjuntos solución de estas proposiciones.

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

a) $\bigcirc \times \triangle = 12$

b) $\square + \triangle + \square = 10$

c) $\bigcirc + \square \leq 4$

2. Usando la notación de conjuntos, escriba el conjunto solución de la proposición siguiente:

$$(\triangle \times 5) + (\square \times 10) = 45,$$

$$\text{Dominio} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

ADIVINANDO EN FORMA METODICA

Un medio práctico de encontrar soluciones de algunas proposiciones abiertas con una variable, es simplemente adivinar o, tal vez más correctamente, usar un método de tanteo. Seleccionando algún número como posible solución y observando el resultado que se obtiene al sustituir la variable de la proposición por esa selección puede obtenerse información que ayude a obtener una segunda selección más cercana a la solución verdadera. Por ejemplo, considérese la proposición abierta

$$(\square + 4) - 5 = 20, \qquad \square = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Nota: El paréntesis muestra el orden de la operación en la proposición, esto es, la suma $(\square + 4)$ debe efectuarse antes de restar 5.

¿Para qué número entero (si lo hay) es verdadera la proposición? Suponiendo que seleccionamos primero el número 10 como posible candidato. Cuando $\square$ se sustituye por 10, la proposición resultante es

$$(10 + 4) - 5 = 20,$$

o

$$9 = 20,$$

que es falsa. Vemos que al sustituir el número 10 por $\square$, resulta que el primer miembro es menor que el segundo, así que en el siguiente intento debemos escoger un número mayor que 10. Probemos el número 15 para el segundo intento. Cuando $\square$ se sustituye por 15, la proposición resultante es

$$(15 + 4) - 5 = 20$$

o

$$14 = 20,$$

lo que es falso. ¿Debe ser mayor o menor que 15, el número escogido en el siguiente intento? Será mayor que 15, porque 15 da un resultado menor en el primer miembro, respecto al segundo. Observando el modelo en los resultados de los dos primeros intentos, tal vez el tercero será correcto. Probemos con 21. Cuando $\square$ se sustituye por 21, tenemos

$$(21+4)-5=20,$$

o

$$20=20,$$

lo que es verdad; y 21 es la solución buscada.

Ahora consideremos la proposición abierta:

$$[2\times(\triangle-3)]+5=27.$$

¿Por qué número entero (si lo hay) puede sustituirse $\triangle$ para hacer verdadera esta proposición? Suponiendo que probemos con 20. Cuando $\triangle$ se sustituye por 20, tenemos:

$$[2\times(20-3)]+5=27,$$

o

$$39=27,$$

lo que es falso. ¿El número escogido en el próximo intento debe ser mayor o menor que 20? Podemos ver que el primer miembro resultó mayor que el segundo; así que en el segundo intento necesitamos escoger un número menor que 20. Probemos 13. Cuando $\triangle$ se sustituye por 13 tenemos

$$[2\times(13-3)]+5=27,$$

o

$$25=27,$$

lo que no es verdad. ¿Emplearemos en el próximo intento un número mayor o menor que 13? Será mayor; porque 13 produjo un resultado menor en el primer miembro, respecto al segundo miembro. Ahora por lo que hemos visto esperamos que 14 sea el resultado correcto. Cuando $\triangle$ se sustituye por 14 obtenemos:

$$[2\times(14-3)]+5=27,$$

$$27=27,$$

lo que es verdad. El conjunto solución es $\{14\}$.

Después de que muchas proposiciones se resuelven de este modo, algunos estudiantes encontrarán formas sistemáticas para obtener los conjuntos solución de las proposiciones abiertas. Los estudiantes pueden estar seguros de que los matemáticos usan frecuentemente el método de tanteos cuando resuelven determinados problemas.

Grupo de ejercicios 7

1. Encuentre la solución de las siguientes proposiciones abiertas mediante intentos y anote esos intentos y su resultado.

a) $(6+\square)-5=23$

b) $(\triangle-4)+6=32$

c) $7+(10-\square)=9$

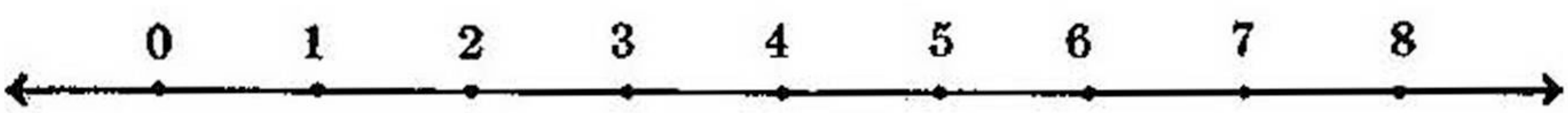
d) $[2\times(\triangle+4)]-9=37$

e) $[3\times(7+\square)]+3=63$

f) $12+[6\times(\triangle-7)]=36$

USO DEL EJE NUMERICO EN LAS PROPOSICIONES NUMERICAS

El eje numérico puede servir como un auxiliar para encontrar soluciones de proposiciones abiertas que contienen una variable. (Véase cuaderno 1: *Conjuntos,* para una discusión detallada sobre el eje numérico.)



Recuerde que los números enteros pueden colocarse en correspondencia biunívoca con un conjunto de puntos uniformemente espaciados sobre el eje numérico, después de que se ha escogido arbitrariamente un punto al que se le hace corresponder el 0, y otro que corresponde a 1.

Consideremos algunos problemas en los que se muestra cómo puede emplearse el eje numérico para representar una relación numérica correspondiente a un problema verbal, y cómo de esta representación puede obtenerse una proposición numérica.

PROBLEMA 1. Juan y Ricardo viven en la misma calle donde se localiza la escuela. Juan vive dos cuadras al este de la escuela y Ricardo vive siete cuadras también al este de la misma. ¿Qué tanto más lejos de la escuela vive Ricardo que Juan?

Suponiendo que Ricardo vive m kilómetros más lejos de la escuela que Juan, puede representarse esto gráficamente como vemos en la figura 2.

La gráfica sugiere la idea de la siguiente proposición numérica:

$2+m=7.$ ($m=7-2$ es una proposición equivalente).

Puesto que el problema sugiere una comparación, la pregunta se contesta diciendo: "Ricardo vive cinco cuadras *más lejos* de la escuela que Juan."

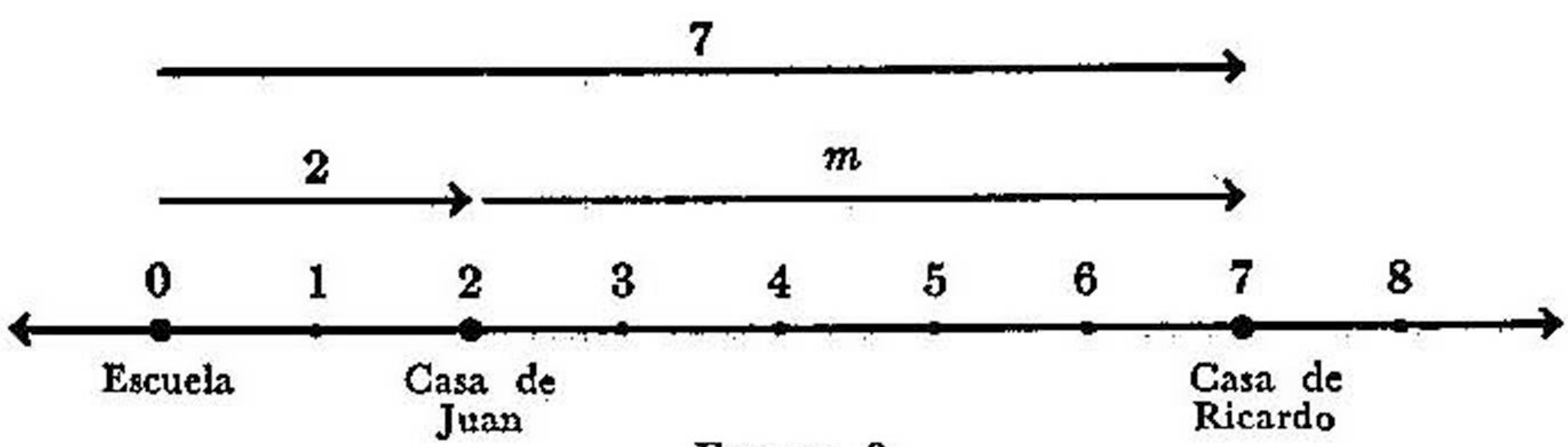


FIGURA 2

Lo enunciado en el siguiente problema sugiere la idea de sustraer de un conjunto de objetos cierto subconjunto. Esta noción se muestra en el eje numérico por un "desplazamiento a la izquierda". (Figura 3.)

PROBLEMA 2. Roberto lleva 15 libros. Un amigo le ayuda tomando 8 y llevándolos él. ¿Cuántos libros llevó entonces Roberto?

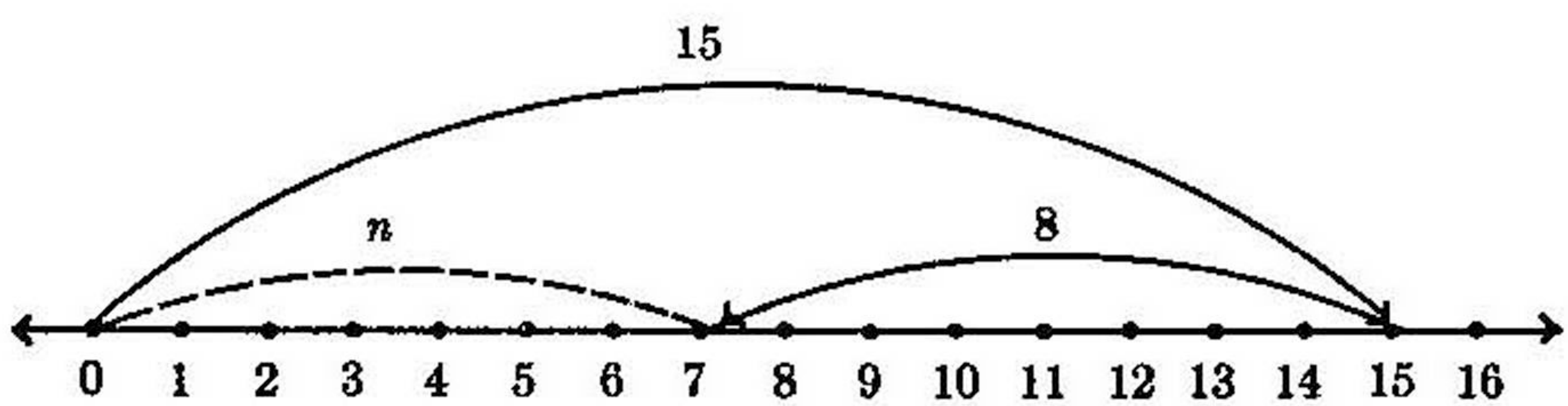
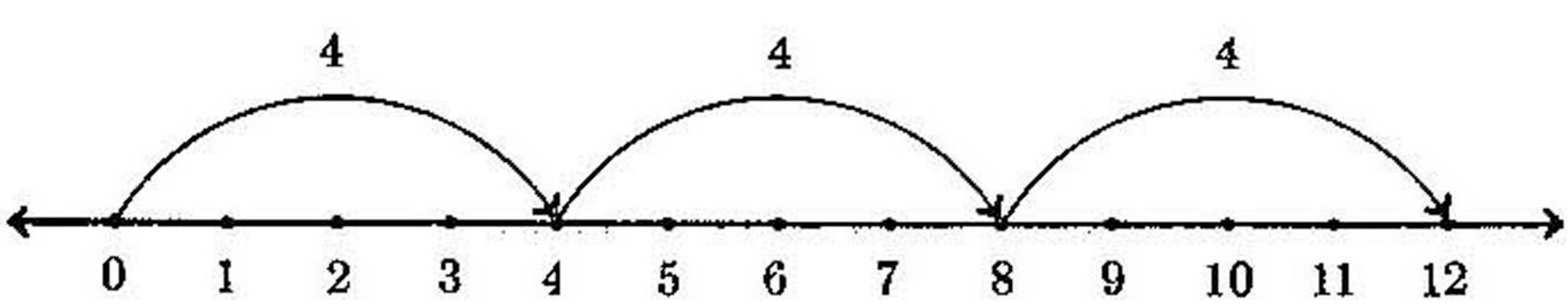


FIGURA 3

La representación gráfica sugiere la siguiente proposición numérica:

$15-8=n.$ $(8+n=15$ es una proposición equivalente).

La contestación al problema sería, por ejemplo: "Roberto llevó siete libros."



$3 \times 4 = 12$

FIGURA 4

El eje numérico puede usarse para ilustrar productos. Por ejemplo, el eje numérico siguiente (figura 4) muestra que el producto de 3 por 4 puede considerarse como la suma de $4+4+4$.

Esto ayuda frecuentemente a representar una situación imaginando que la acción tiene lugar en el eje numérico. Esta idea puede emplearse en toda situación semejante al siguiente ejemplo:

PROBLEMA 3. Supongamos que un conejo avanza cuatro unidades de un salto. ¿Cuántos saltos a la derecha podrá completar si empieza en el punto correspondiente a cero sobre el eje numérico (figura 5) sin que se le permita ir más allá del punto que corresponde al 27?

Como estimamos que el conejo salta a razón de 4 unidades por brinco, es claro que no podrá caer exactamente en el punto correspondiente a 27, por lo que sobrarán algunas unidades. Entonces una proposición numérica que exprese esta situación puede ser $27=(n\times 4)+r$. (La variable n representa el número de saltos completos, y la variable r representa el número de unidades que sobran.)

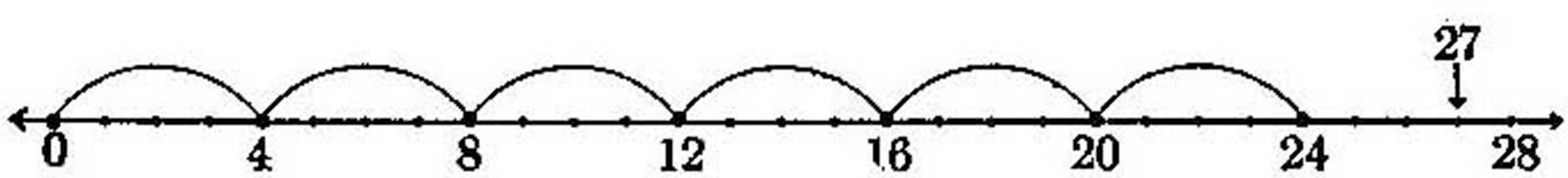


FIGURA 5

Vemos en la gráfica (figura 5) que el conejo puede completar 6 saltos y que sobran 3 unidades.

Las reglas siguientes deben tomarse en cuenta para el empleo del eje numérico en la solución de problemas.

1. Se pueden deducir varias proposiciones numéricas de la representación gráfica (en el eje) que muestre las relaciones de un problema.
2. Diferentes situaciones físicas o problemas pueden representarse por una misma gráfica y, en consecuencia, describirse mediante la misma proposición numérica.

Representación gráfica de conjuntos solución

Puntos sucesivos sobre un eje numérico corresponden a números sucesivos enteros cuyo orden se ha establecido previamente. (Para la discusión de orden véase el cuaderno 1: *Conjuntos.)* El eje numérico (figura 6) está dispuesto de modo que el punto correspondiente al mayor de dos números se encuentre a la derecha del que corresponde al menor. Entonces comprobaremos la veracidad de un enunciado acerca de la igualdad o desigualdad de números, observando la posición de los puntos a los que corresponden los números del enunciado.

¿Es $6>5$ una proposición verdadera?

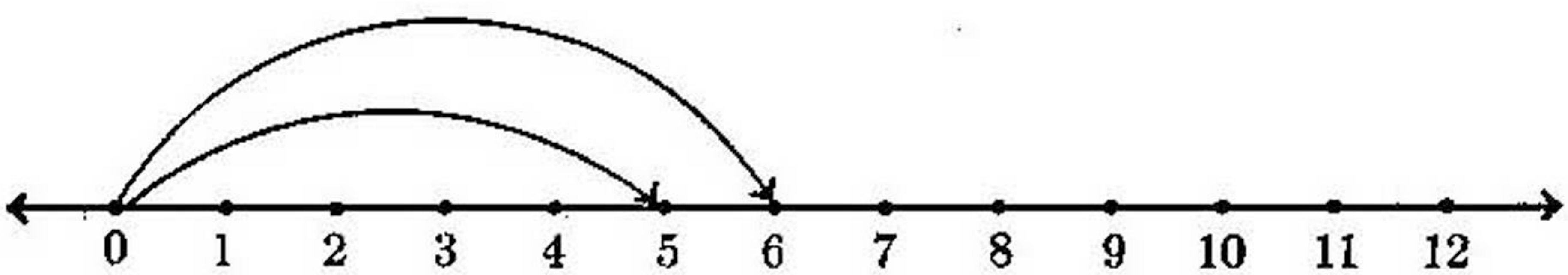


Figura 6

El punto correspondiente al número 6 está a la derecha del punto correspondiente al número 5; luego la proposición $6>5$ es verdadera.

El conjunto solución de una proposición abierta en la que intervenga una desigualdad puede representarse gráficamente en el eje numérico. Usando los números indicados en el eje numérico siguiente (figura 7), como el dominio ¿cuál es el conjunto solución de la proposición abierta

$$m+2>7?$$

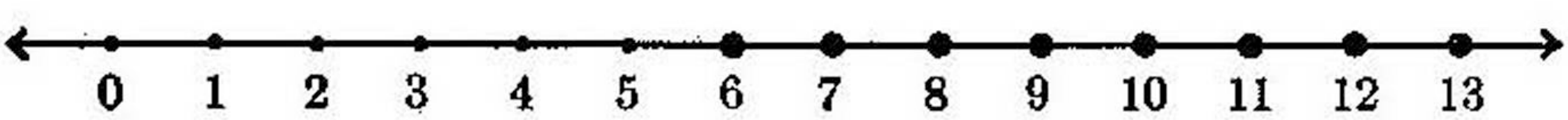


Figura 7

Si m se sustituye por 5, tendremos $5+2>7$, lo que no es verdad.

Si m se sustituye por 6, tendremos $6+2>7$, lo que es verdad.

También resultan proposiciones verdaderas cuando m se sustituye por 7, 8, 9, 10, 11, 12 ó 13. Todos los números del dominio de la variable que correspondan a puntos situados a la derecha del punto señalado por 5, son miembros del conjunto solución. Los otros números del dominio no son miembros del conjunto solución. Al representar el conjunto solución en un eje numérico, señalamos con un punto mayor los puntos correspondientes a cada uno de los números 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13. El conjunto solución es $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. El conjunto de puntos marcados con puntos mayores es la *gráfica* del conjunto solución.

Determine el conjunto solución de la proposición abierta

$$y+3<11,$$

empleando como dominio el conjunto de los números indicados en el eje numérico siguiente (figura 8).

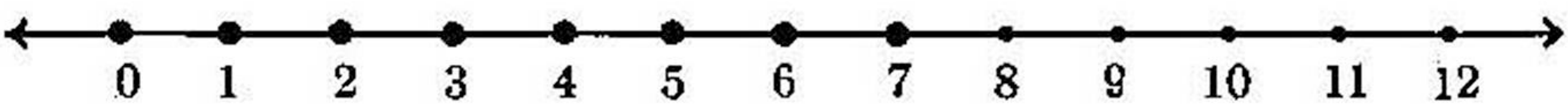


FIGURA 8

Si y se sustituye por 8, tenemos $8+3<11$, lo que no es verdad.
Si y se sustituye por 7, tenemos $7+3<11$, lo que es verdad.

Todo número del dominio que corresponde a puntos marcados a la izquierda del punto correspondiente a 8 es miembro del conjunto solución, los otros números del dominio no son miembros del conjunto solución. El conjunto solución es

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Al representar el conjunto solución en el eje numérico, marcamos con puntos mayores, los puntos correspondientes a los números del conjunto, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, como se ve en la figura 8.

Empleando el conjunto de los números enteros como el dominio de la variable, determine el conjunto solución de la proposición abierta

$$\square-4>7$$

en el eje numérico siguiente (figura 9)

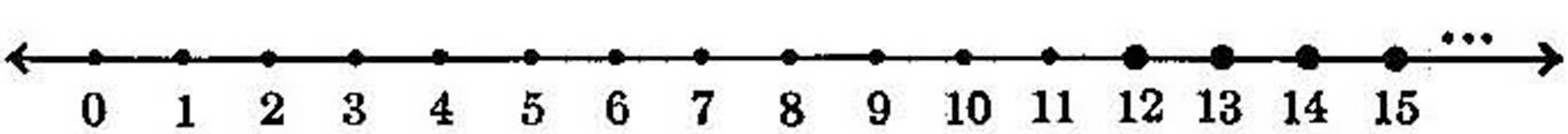


FIGURA 9

Si $\square$ se sustituye por 10, tenemos $10-4>7$, lo que es falso.

Si $\square$ se sustituye por 11, tenemos $11-4>7$, lo que es falso.

Si $\square$ se sustituye por 12, tenemos $12-4>7$, lo que es verdad.

Si $\square$ se sustituye por 13, tenemos $13-4>7$, lo que es verdad.

Todo número mayor que 11, es entonces miembro del conjunto solución. Los otros números enteros no son miembros del conjunto solución. Representamos el conjunto solución en el eje numérico (figura 9), marcando con puntos mayores los puntos correspondientes a 12, 13, 14 y 15. Después de 15, marcamos tres puntos suspensivos arriba del eje que indican que todos los números enteros después de 15 pertenecen a la gráfica del conjunto solución que es infinito y por eso no se pueden representar todos sus miembros. Obtengamos el conjunto solución de la siguiente proposición "o" y mostremos la gráfica del conjunto solución en el eje numérico (figura 10).

$$\square+2\geq 10, \qquad D=\{6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Si $\square$ se sustituye por 6, tenemos $6+2\geq 10$, lo que es falso.

Si $\square$ se sustituye por 7, tenemos $7+2\geq 10$, lo que es falso.

Si $\square$ se sustituye por 8, tenemos $8+2\geq 10$, lo que es verdadero.

Si $\square$ se sustituye por 9, tenemos $9+2\geq 10$, lo que es verdadero.

Si $\square$ se sustituye por 10, tenemos $10+2\geq 10$, lo que es verdadero.

Conjunto solución$=\{8, 9, 10\}$.

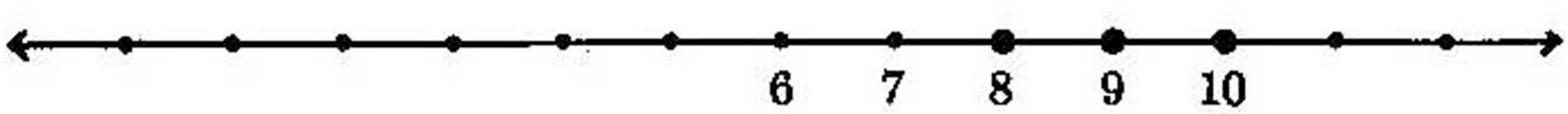


FIGURA 10

Note que sólo están marcados (con puntos mayores) los puntos correspondientes a los números que son miembros del dominio.

Consideremos ahora la proposición abierta "y".

$$8<n<12, \qquad D=\{8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Si n se sustituye por 8, tenemos $8<8<12$, lo que es falso.

Si n se sustituye por 9, tenemos $8<9<12$, lo que es verdadero.

Si n se sustituye por 10, tenemos $8<10<12$, lo que es verdadero.

Si n se sustituye por 11, tenemos $8<11<12$, lo que es verdadero.

Si n se sustituye por 12, tenemos $8<12<12$, lo que es falso.

Conjunto solución$=\{9, 10, 11\}$.

La gráfica del conjunto solución es como se ve enseguida (figura 11).

FIGURA 11

Grupo de ejercicios 8

1. Trace un eje numérico ilustrando cada una de las proposiciones numéricas. Marque en el eje numérico los puntos correspondientes a los números enteros de 0 a 12 inclusive.

   a) $12-7=a$
   b) $6+5=x$
   c) $2\times 5=m$
   d) $5\times 2=m$
   e) $\square+3=10$

2. Trace un eje numérico para cada uno de los problemas y marque los puntos correspondientes a los números enteros de 0 a 12 inclusive. Este conjunto de números se considera como el dominio de la variable. Haga la gráfica del conjunto solución de cada una de las proposiciones abiertas.

   a) $6+\square<14$
   b) $\square-5=4$
   c) $\square\geq 6$
   d) $\triangle\leq 4$
   e) $1<y<6$
   f) $1\leq y\leq 6$

3. Escriba una proposición de adición que sea equivalente a la proposición abierta del ejercicio 1 *a)*.

4. Escriba dos proposiciones de sustracción que sean equivalentes a la proposición abierta del ejercicio 1 *b)*.

LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Las proposiciones numéricas son útiles para encontrar la solución de problemas verbales. Es necesario escribir proposiciones numéricas de problemas para poder transformar las proposiciones verbales y oraciones en lenguaje matemático. A continuación se dan algunas oraciones como las que se presentan en los problemas, con sus expresiones matemáticas respectivas.

La suma de un número y 2	$n+2$
Un número aumentado en 10	$n+10$
15 aumentado en algún número	$15+n$
36 disminuido de algún número	$36-n$
Un número disminuido en 3	$n-3$

Un número disminuido en 8	$n-8$
El producto de 3 y un número	$3\times n$
La edad de un niño dos años mayor que Federico, si Federico tiene n años	$n+2$
El costo en centavos de 3 muñecos, que cuestan 40 centavos cada uno	3×40
El número de centavos que cuestan n muñecos si cada uno cuesta 40 centavos	$n\times 40$
El número de centavos que cuestan 3 muñecos, si cada uno cuesta n centavos	$3\times n$
El número 54 es 3 veces cierto número	$54=3\times n$
$\frac{1}{2}$ de un número	$\frac{1}{2}\times n$ ó $\frac{n}{2}$

Ahora consideremos la siguiente situación:

Juana tenía 22 matatenas. Ella puede encontrar sólo 8. ¿Cuántas ha perdido?

Hagamos la lista de los números que intervienen:

Número de matatenas que Juana tiene ahora	8
Número de matatenas perdidas	n
Número de matatenas que Juana tenía	$n+8$
Número de matatenas que Juana tenía	22.

Hay dos expresiones para el número de matatenas que Juana tenía, $(n+8)$ y 22. Por consiguiente, tenemos la proposición numérica $n+8=22$.

Considerando el problema de modo algo diferente:

Número de matatenas que Juana tenía	22
Número de matatenas que tiene ahora	8
Número de matatenas perdidas	$22-8$
Número de matatenas perdidas	n.

Aquí tenemos dos expresiones para el número de matatenas perdidas de las que obtenemos la proposición numérica $n=22-8$.

Vemos que las proposiciones numéricas $n+8=22$ y $n=22-8$ son verdaderas si n se sustituye por 14, y falsa si n se sustituye por otro número. Estas proposiciones numéricas son equivalentes una respecto a otra, porque tienen el mismo conjunto solución. Cada proposición es una representación correcta de la relación numérica del problema. Cuando estamos resolviendo algún problema necesitamos recordar que puede haber más de una proposición numérica correcta que describa la relación numérica del problema.

El siguiente ejemplo ilustra cómo transformar un problema en una proposición numérica abierta y cómo usar la proposición numérica para encontrar la solución del problema. En el enunciado verbal de un problema el dominio de la variable generalmente no se determina, pero las restricciones del dominio quedan implícitas en los términos del enunciado. En algunos casos, la naturaleza del problema es tal, que el dominio se restringe a los números enteros; en otros, es posible emplear los números racionales como dominio.

PROBLEMA 1. Tengo x pesos y tu tienes \$2 más que yo. Juntos tenemos \$16. ¿Cuántos pesos tengo yo?

Solución:

Hagamos una lista de los números que intervienen en el problema:

Número de pesos que tengo	x
Número de pesos que tienes tú	$x+2$
Número de pesos en total	$x+(x+2)$
Número de pesos en total	16

Proposición: $x+(x+2)=16$, $D=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Esta proposición es verdadera cuando x se sustituye por 7 y falsa cuando x se sustituye por otro número. Entonces, tengo \$7.

PROBLEMA 2. Tú tienes 2 veces más dinero que yo. Juntos tenemos 24 pesos. ¿Cuantos pesos tengo yo?

Solución:

Número de pesos que tengo	n
Número de pesos que tienes	$(2\times n)$
Número de pesos que tenemos	$n+(2\times n)$
Número de pesos que tenemos	24

Proposición: $n+(2+n)=24$ $D=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Conjunto solución: $\{8\}$.

Entonces, tengo 8 pesos.

PROBLEMA 3. Juana compró 2 docenas de panecillos a 30 centavos la docena y algunos dulces. Su nota marcaba \$1.40. ¿Cuánto le costaron los dulces?

Solución:

Llamemos n al número de centavos que costaron los dulces.

Número de centavos por una docena de panecillos	30
Número de centavos por dos docenas de panecillos	2×30
Número de centavos por los dulces	n
Número de centavos por el total de la nota	$(2\times 30)+n$
Número de centavos por el total de la nota	140

Proposición: $(2\times 30)+n=140$ $\quad D=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Conjunto solución: $\{80\}$.

Entonces, los dulces costaron 80 centavos.

PROBLEMA 4. Roberto compró 3 pelotas y un guante por \$2.46. El guante costó \$1.50. ¿Cuál fue el precio de una pelota si las tres costaron lo mismo?

Solución:

Número de centavos por el guante	150
Número de centavos por una pelota	n
Número de centavos por las tres pelotas	$3\times n$
Número de centavos por las pelotas y el guante	$(3\times n)+150$
Número de centavos por las pelotas y el guante	246

Proposición: $(3\times n)+150=246$, $\quad D=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Esta proposición es equivalente a la proposición $3\times n=96$.
Conjunto solución: $\{32\}$.

Entonces, el precio de cada pelota fue de 32 centavos.

PROBLEMA 5. Una playa pública está entre las ciudades A y B. La playa está 3 veces más lejos de B que de A. La distancia de A y B es de 58 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros hay de la playa a la ciudad A?

Solución:

El número requerido de kilómetros puede no ser un número entero. Por lo que tomamos como nuestro dominio a los números racionales.

Número de kilómetros de la playa a A n

Número de kilómetros de la playa a B $3 \times n$

Número de kilómetros de A a B

Número de kilómetros de A a B 58

Proposición: $n + (3 \times n) = 58$ $D = \{$números racionales$\}$.

Esta proposición es equivalente a

$$(1 \times n) + (3 \times n) = 58$$

Lo que equivale a

$$(1+3) \times n = 58 \qquad \text{(propiedad distributiva)}$$

o

$$4 \times n = 58.$$

El valor que al sustituirse hace a la proposición es $\frac{58}{4}$ ó $14\frac{1}{2}$

Entonces, la distancia entre la playa y la ciudad A es de $14\frac{1}{2}$ kilómetros.

No todos los problemas verbales pueden resolverse mediante proposiciones en las que intervengan ecuaciones. Hay problemas verbales en que intervienen tanto desigualdades como igualdades. Muchas situaciones de la vida implican la noción de desigualdad. Tales problemas, como quiera que sea, pueden expresarse por proposiciones numéricas del modo que expresamos problemas en los que intervienen igualdades.

PROBLEMA 6. María tiene \$10. Compra dos pares de guantes a \$3 el par. También quiere comprar una blusa, ¿cuánto puede gastar en la blusa?

Solución:

Sea s el número de centavos que ella gastará en la blusa.

Número de centavos por un par de guantes	300
Número de centavos por los dos pares de guantes	(2×300)
Número de centavos que María tiene	1 000
Los centavos que María puede gastar en la blusa no pueden exceder de	$1\,000-(2\times300)$

Proposición: $s\leq 1\,000-(2\times300)$, $D=\{\text{números racionales}\}$. Esta proposición es equivalente a la proposición $s\leq400$. Entonces vemos que María no puede gastar más de 400 centavos en una blusa. María *puede* gastar \$4 o cualquier cantidad menor que \$4, por la blusa. Si en el problema se estableció que María debe gastar todo su dinero, entonces tendrá que gastar \$4. Como el problema establece: ¿cuánto *puede* gastar María? Esto implica que María pueda escoger. Puede gastar \$4 en la blusa, o gastar cualquier cantidad menor que \$4.

PROBLEMA 7. El señor Martínez viajó 240 kilómetros en una carretera de paga. La velocidad mínima permitida era de 40 kilómetros por hora; la máxima, de 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo le tomó recorrer los 240 kilómetros si obedeció la ley en todo el viaje, y no hizo paradas?

Solución:

Número de kilómetros que recorrió	240
Velocidad mínima en kilómetros por hora	40
Velocidad máxima en kilómetros por hora	60
Número máximo de horas	$240\div40$
Número mínimo de horas	$240\div60$
Número de horas empleadas en recorrer 240 kilómetros	t

El número t puede ser mayor o igual que $(240\div60)$ *y* menor o igual que $(240\div40)$.

Proposición: $240\div60\leq t\leq240\div40$ $D=\{\text{números racionales}\}$. Esta proposición es equivalente a la proposición $4\leq t\leq6$; t puede ser cualquier número de 4 a 6 inclusive. Entonces, el señor Martínez empleó de 4 a 6 horas en recorrer 240 kilómetros. No hay fórmula mágica que asegure la solución correcta de problemas. Transformando el problema verbal en proposiciones numéricas abiertas y encontrando al conjunto solución de la ecuación o desigualdad. Después que la solución se encuentre, puede escribirse una proposición que represente la solución como respuesta del problema.

Grupo de ejercicios 9

1. Transforme cada una de las siguientes frases verbales en expresiones numéricas.

   a) La suma de un número y dieciséis.
   b) El producto de trece y un número.
   c) Un quinto de un número.
   d) Un número dividido entre cuatro.
   e) El producto de cinco y un número más dos.

2. Transforme cada una de las siguientes expresiones verbales en proposiciones numéricas:

   a) La suma de seis veces un número y ocho es igual a cuarenta y cuatro.
   b) Un número más ocho es mayor que catorce.
   c) El resultado de dividir un número entre cuatro es menor que diecisiete.
   d) Ocho disminuido en un número es igual a cuatro.
   e) Un número aumentado en siete es mayor que tres veces ese número.

3. Resuelva los siguientes problemas verbales. Para cada problema anote los números que intervengan y escriba la proposición numérica. Encuentre el conjunto solución y escriba la proposición que represente la respuesta.

   a) Susana tiene guardados \$3.54. Ganó 75 centavos más por cuidar niños. ¿Cuánto dinero necesita todavía para comprar un suéter que cuesta \$7.95?
   b) Jorge tiene \$15. Gastó \$6 en zapatos de béisbol y \$5 en una camisa de béisbol. ¿Cuánto puede gastar en un bat?
   c) La ciudad *B* está a 2 200 kilómetros de la ciudad *A*. En un vuelo sin escalas de *A* a *B*, un avión recorre por término medio 535 kiló-

metros por hora. ¿Qué tan lejos de B está el avión 3 horas después de salir de A?

d) Un estudiante universitario tiene 93 días de vacaciones. Emplea 9 días en un viaje de pesca. El resto del tiempo trabaja en un campo como agrícola consultor. ¿Cuántas semanas puede permanecer en el campo?

e) La temperatura más alta en 5 días consecutivos en San Francisco fue de 70°, 72°, 78°, 69° y 74°. ¿Cuál fue el promedio de temperaturas más altas en esos 5 días?

4. A continuación se dan varias proposiciones abiertas. Por cada proposición abierta enuncie una proposición verbal de tal manera que la proposición abierta correspondiente exprese las relaciones numéricas.

a) $n+8=39$ *c)* $(2\times n)+7<26$

b) $\frac{1}{4}\times n=19$ *d)* $39\leq n\leq 45$

SUMARIO

1. Las proposiciones numéricas tales como

$$5+2=9$$

y

$$19>8$$

se llaman *enunciados*. Un enunciado puede ser verdadero o falso (podemos decir, si su *valor de verdad* es "falso" o "verdadero"). Aquí $5+2=9$ es un enunciado falso, mientras que $19>8$ es un enunciado verdadero.

2. Una proposición numérica tal como

$$\square+5=12, \qquad \text{dominio}=\{0, 1, 2, 3, \ldots, 12\}.$$

se llama *proposición numérica abierta*. El símbolo $\square$ se llama *variable* y representa a un número definido, pero no especificado del conjunto dado de números, $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Este conjunto de números se llama *dominio* de la variable. Cuando el símbolo $\square$ se sustituye por un numeral que representa un número del dominio, la proposición resultante puede ser verdadera o falsa.

3. Un número del dominio de la variable que corresponde a una proposición abierta se llama solución de la proposición abierta, teniendo en

cuenta que resulta un enunciado verdadero cuando la variable se sustituye por el numeral correspondiente a ese número. Por ejemplo, 7 es una solución de la proposición $\square + 5 = 12$. El conjunto de todas las soluciones de una proposición abierta recibe el nombre de *conjunto solución*.

4. Una solución de una proposición abierta con dos variables es un par ordenado de números de un conjunto especificado de pares ordenados de números. Nuevamente el conjunto de todas las soluciones se llama el conjunto solución.

5. Dos proposiciones abiertas con una variable son *equivalentes* si tienen el mismo conjunto solución. Por ejemplo, $\square + 5 < 11$ y $\square < 6$ son equivalentes.

6. Una proposición numérica que expresa la igualdad de dos números, se llama *ecuación*.

7. Una proposición numérica que exprese la desigualdad de dos números se llama *desigualdad*.

8. Las proposiciones abiertas se emplean con frecuencia en la solución de problemas verbales. El procedimiento es este: primero transforme la relación numérica contenida en el problema en una proposición numérica abierta, después, obtenga el conjunto solución de esta proposición y, finalmente, interprete la solución o soluciones como respuesta al problema.

9. El *eje numérico* es un instrumento útil tanto para expresar gráficamente la relación numérica contenida en el problema como para mostrar la gráfica de la solución de la proposición abierta que expresa el problema.

RESPUESTAS A LOS GRUPOS DE EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1

1. 11	3. 27	5. 9
2. 11	4. 30	6. 10

Grupo de ejercicios -

1. *a)* $24-8=16$
   b) $16>10$
   c) $17\neq 8+2$
   d) $80<20$
   e) $10=3\times 4$
   f) $9<11$
   g) $12\not> 7$
   h) $20+6>3\times 8$

2. *a)* verdadero *b)* verdadero *c)* verdadero *d)* falso *e)* falso *f)* verdadero *g)* falso *h)* verdadero

3. *a)* La suma de quince y tres es igual a doce menos tres.
   b) El producto de cuatro por seis es mayor que veinte.
   c) Dieciocho es menor que la suma de diez y quince.
   d) Catorce no es igual a la suma de ocho y cinco.
   e) Diecisiete no es mayor que once.
   f) Treinta menos cinco no es menor que la suma de diez y diez.

4. *a)* falso
   b) verdadero
   c) verdadero
   d) verdadero
   e) falso
   f) verdadero

5. *a)* falso
   b) verdadero
   c) verdadero
   d) verdadero
   e) falso

Grupo de ejercicios 3

1. *a)* $6+\square=15$
   b) $2+m>10$
   c) $20<\triangle-8$
   d) $y-9>24$

2. *a)* La suma de ocho y un número es igual a veintidós.
   b) Catorce es menor que un número menos cinco.
   c) La suma de un número y ocho es mayor que diecisiete.
   d) Un número menos seis no es igual a trece.

3. *a)* $\{34\}$
   b) $\{8, 9, 10, 11, \ldots\}$
   c) $\{11, 12, 13, 14, \ldots\}$
   d) $\{6, 7, 8, 9, \ldots\}$
   e) $\{21\}$
   f) $\{0\}$
   g) $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
   h) $\{5,6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$

Grupo de ejercicios 4

Hay muchas posibilidades. Algunos ejemplos son los siguientes:

1. *a)* $264+928=\square$
$928=\square-264$
$\square-928=264$

b) $n-89=437$
$n=437+89$
$n-437=89$

c) $964=r+407$
$964-407=r$
$964-r=407$

d) $1\,007+r=3\,986$
$3\,986-1\,007=r$
$3\,986-r=1\,007$

2. *a)* $1\,368\div 57=n$
$57=1\,368\div n$
$57\times n=1\,368$

b) $x\times 35=2.240$
$z=2\,240\div 35$
$35=2\,240\div z$

c) $48\times 37=\square$
$\square\div 37=48$
$\square=37\times 48$

d) $n=72\times 43$
$n\div 43=72$
$72=n\div 43$

Grupo de ejercicios 5

1. *a)* $m\geq 9$

b) $13+y\leq 29$

c) $\square+11\geq 30$

d) $8<n<15$

e) $9\leq x\leq 30$

2. *a)* Un número es menor o igual que siete.
b) La suma de un número y dos es mayor o igual que tres.
c) Siete menos un número es menor o igual que doce.
d) Dos es menor que un número, y a la vez éste es menor que cinco.
e) Ocho es menor o igual que un número y este número es menor o igual que quince.

3. *a)* {2, 3, 4, ...}

b) {0, 1, 2, 3}

c) {0, 1, 2, 3}

d) {8, 9, 10, 11, ...}

e) {21, 22, 23, 24, ...}

f) {0, 1, 2}

g) {5}

h) {4, 5, 6}

Grupo de ejercicios 6

1. *a)*

✿	△
2	6
3	4
6	2
4	3

b)

□	△
1	8
2	6
3	4
5	0

c)

○	□
0	0
0	1
0	2
0	3
0	4
1	0
1	1
1	2
1	3
2	0
2	1
2	2
3	0
3	1
4	0

2. $\{(9, 0), (7, 1), (5, 2), (3, 3), (1, 4)\}$

Grupo de ejercicios 7

1. Las respuestas dadas son pocas de las muchas soluciones posibles:

a) $(6+\square)-5=23$

Pruebe 25 como primer intento. Cuando $\square$ se sustituye por 25, se tiene $(6+25)-5=23$, o sea $26=23$, que es falso.

Puesto que 26 es mayor que 23, el segundo intento debería ser menor que 25. Pruebe 22 como segundo intento. Cuando $\square$ se sustituye por 22, tenemos

$(6+22)-5=23,$

$23=23,$ que es verdad.

Entonces, 22 es la solución de la proposición.

b) $(\triangle - 4) + 6 = 32$

Pruebe 40 como primer intento. Cuando $\triangle$ se sustituye por 40, tenemos

$(40-4)+6=32,$

$42=32,$ que es falso.

Puesto que 42 es mayor que 32, el segundo intento debería ser menor que 40. Pruebe 30 como segundo factor. Cuando $\triangle$ se sustituye por 30, tenemos

$(30-4)+6=32,$

$32=32,$ lo que es verdad.

Entonces, 30 es la solución de esta proposición.

c) $7+(10-\square)=9$

Pruebe 5 como primer intento. Cuando $\square$ se sustituye por 5 tenemos

$7+(10-5)=9,$

$12=9,$ que es falso.

Pruebe 9 como segundo intento. Cuando $\square$ se sustituye por 9 tenemos

$7+(10-9)=9,$

$8=9,$ que es falso.

Pruebe 8 como tercer intento. Cuando $\square$ se sustituye por 8, tenemos

$7+(10-8)=9,$

$9=9,$ que es verdadero.

Entonces, 8 es la solución de la proposición.

d) $[2\times(\triangle+4)]-9=37$

Pruebe 20 como primer intento. Cuando $\triangle$ se sustituye por 20, tenemos

$[2\times(20+4)]-9=37,$

$39=37,$ lo que es falso.

Pruebe 19 como segundo intento. Cuando $\triangle$ se sustituye por 19, tenemos

$[2\times(19+4)]-9=37,$

$37=37,$ lo que es verdadero.

Entonces, 19 es la solución de la proposición.

e) $[3\times(7+\square)]+3=63$

Pruebe el número 10 como primer intento. Cuando $\square$ se sustituye por 10, tenemos

$[3\times(7+10)]+3=63,$

$54=63,$ que es falso.

Pruebe 15 como segundo intento. Cuando $\square$ se sustituye por 15, tenemos

$[3\times(7+15)]+3=63,$

$69=63,$ que es falso.

Pruebe 13 como tercer intento. Cuando $\square$ se sustituye por 13, tenemos

$[3\times(7+13)]+3=63,$

$63=63,$ que es verdadero.

Entonces, 13 es la solución de esta proposición.

f) $12+[6\times(\triangle-7)]=36$

Pruebe 10 como primer intento. Cuando $\triangle$ se sustituye por 10, tenemos

$12+[6\times(10-7)]=36,$

$30=36,$ que es falso.

Pruebe 11 como segundo intento. Cuando $\triangle$ se sustituye por 11, tenemos

$12+[6\times(11-7)]=36,$

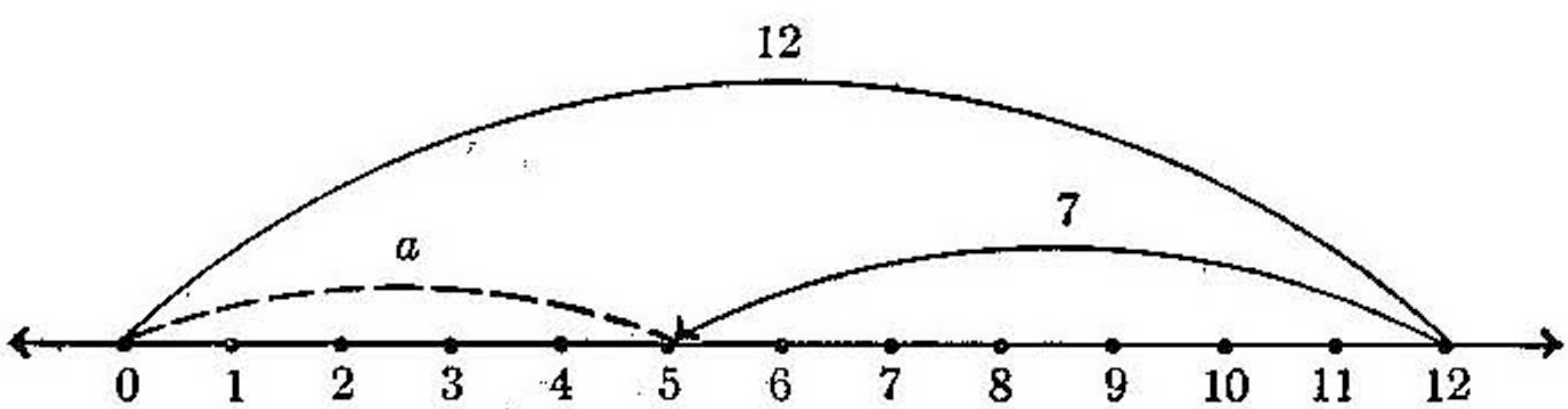
$36=36,$ que es verdadero.

Entonces, 11 es la solución de esta proposición.

Grupo de ejercicios 8

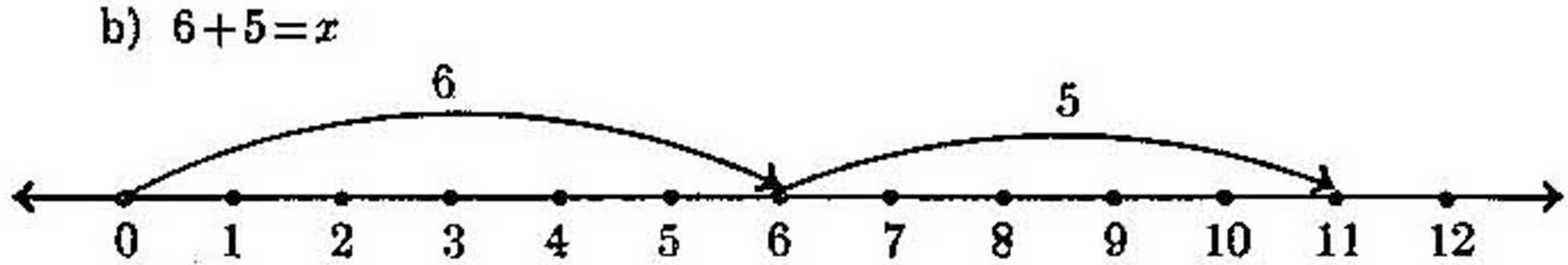
En muchos casos hay varios caminos por los que el problema puede ilustrarse en el eje numérico. Se da un ejemplo para cada una de las proposiciones.

1. *a)* $12-7=a$



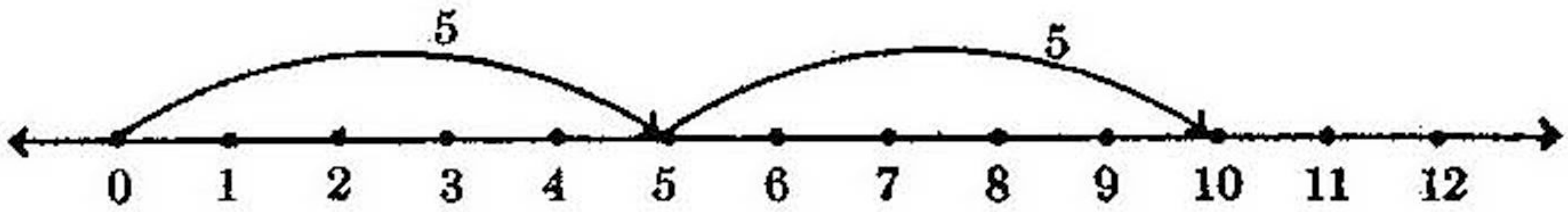
$12-7=5$

b) $6+5=x$



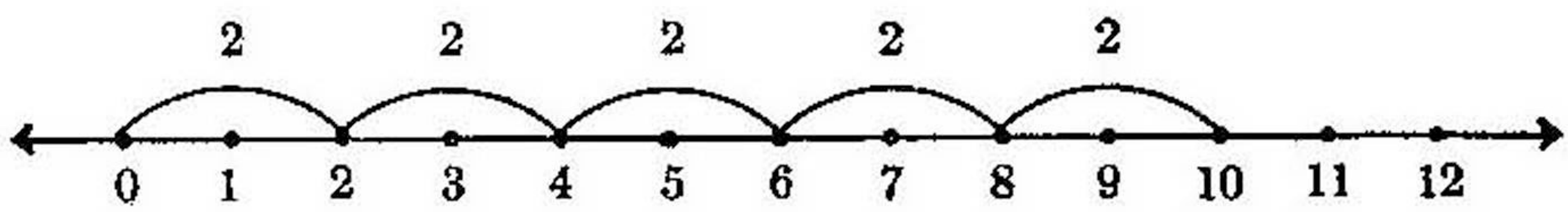
$6+5=11$

c) $2 \times 5 = m$



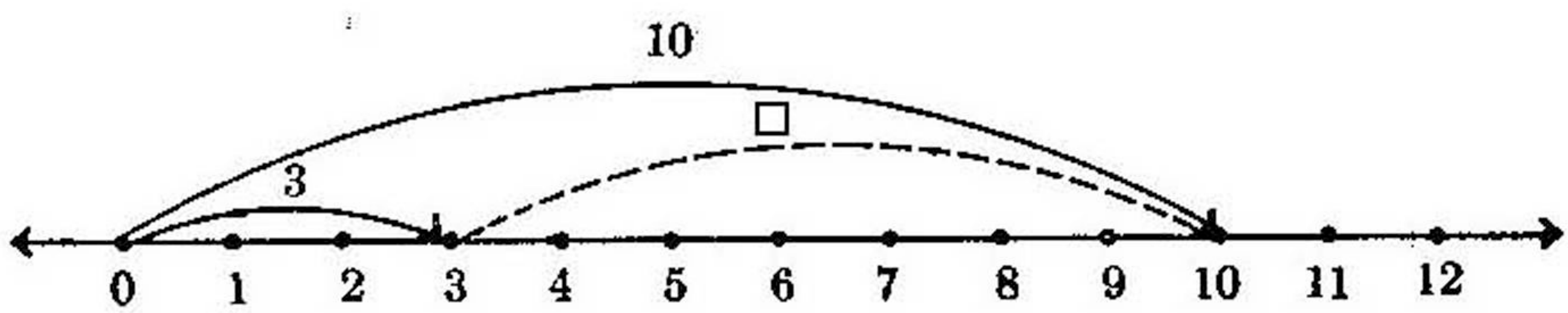
$2 \times 5 = 10$

d) $5 \times 2 = m$



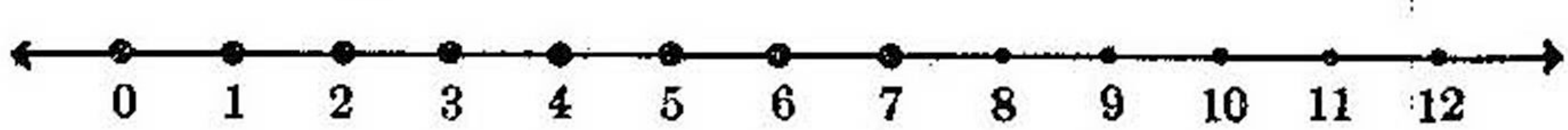
$5 \times 2 = 10$

e) $\square + 3 = 10$



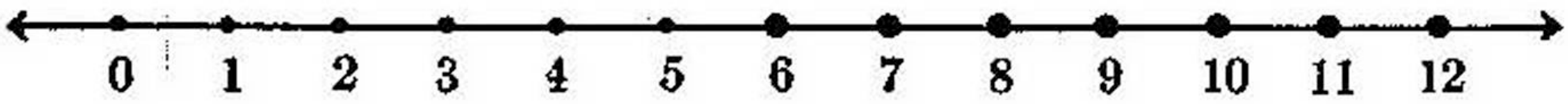
$7 + 3 = 10$

2. *a)* Cuando $\square$ se sustituye por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en la proposición $6 + \square < 14$, resulta una proposición verdadera, para otras sustituciones resultan proposiciones falsas. La gráfica del conjunto solución está en seguida.

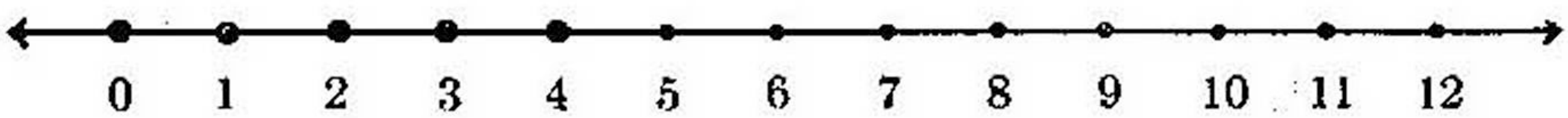


b) Cuando $\square$ se sustituye por 10, 11, 12 en la proposición $\square - 5 > 4$, resulta una proposición verdadera; para otras sustituciones resultan proposiciones falsas. La gráfica de la solución está representada en seguida.

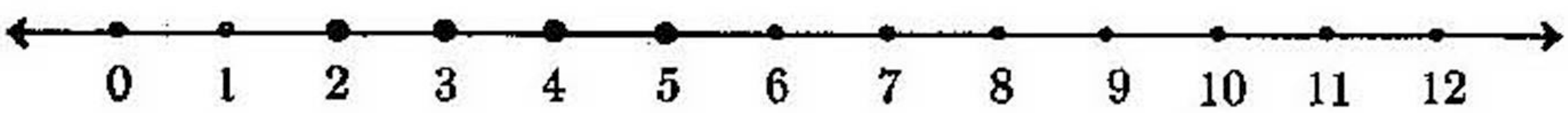
c) Cuando $\square$ se sustituye por 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 en la proposición $\square \geq 6$, la proposición resulta verdadera.



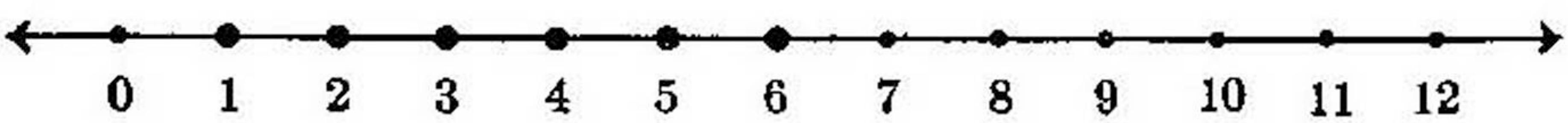
d) Cuando △ se sustituye por 0, 1, 2, 3, 4, en la proposición $\triangle \leq 4$, resulta una proposición verdadera.



e) Cuando y se sustituye por 2, 3, 4, 5 en la proposición $1<y<6$, resulta una proposición verdadera.



f) Cuando y se sustituye por 1, 2, 3, 4, 5, 6, en la proposición $1 \leq y \leq 6$, resulta una proposición verdadera.



3. $7+a=12$

4. $x-5=6$
   $x-6=5$

Grupo de ejercicios 9

1. *a)* $n+16$
   b) $13 \times n$
   c) $\frac{1}{5} \times n$, ó $\frac{n}{5}$
   d) $n \div 4$, ó $\frac{n}{4}$
   e) $5 \times (n+2)$

2. *a)* $(6 \times n)+8=44$
   b) $n+8>14$
   c) $n \div 4<17$
   d) $8-n=4$
   e) $n+7>3 \times n$

3. *a)* Número de centavos que Susana ahorró — 354
   Número de centavos que ganó — 75
   Número de centavos que necesita — $795-(354+75)$
   Número de centavos que necesita — n
   Proposición: $795-(354+75)=n$
   Solución: $n=366$
   Susana necesita \$3.66 para comprar el suéter.

b) Número de pesos que tiene Jorge — 15
Número de pesos que gastó en zapatos de beisbol — 6
Número de pesos que gastó en la camisa de beisbol — 5
Número de pesos que puede gastar — $0 \leq n \leq 15-(6+5)$
Proposición: $0 \leq n \leq 15-(6+5)$
Solución: $0 \leq n \leq 4$
Jorge puede gastar \$4.00 o bien una cantidad menor que \$4.00 para el bat.

c) La distancia en kilómetros de A a B es — $2\,200$
Promedio de velocidad en kilómetros por hora — 535
Distancia recorrida en 3 horas — 3×535
Distancia a B después de 3 horas de recorrido — $2\,200-(3 \times 535)$
Distancia a B después de 3 horas — x
Proposición: $2\,200-(3 \times 535) - x$
Solución: $x=595$
El jet está a 595 kilómetros de B

d) Número de días de vacaciones — 93
Número de días empleados en el viaje de pesca — 9
Número de días empleados en el campo — $93-9$
Número de semanas empleadas en el campo — $(93-9) \div 7$
Número de semanas empleadas en el campo — n
Proposición: $(93-9) \div 7 = n$
Solución: $n=12$
Permaneció 12 semanas en el campo

e) Temperatura de San Francisco: — 70, 72, 78, 69, 74
Promedio de temperatura en 5 días — $(70+72+78+69+74) \div 5$
Promedio de temperatura en 5 días — n
Proposición: $(70+72+78+69+74) \div 5 = n$
Solución: $n = 72\frac{3}{5}$ grados.

El promedio de temperaturas fue de $72\frac{3}{5}$ grados.

4. Hay muchos problemas verbales que pueden representarse por cada proposición abierta. Enseguida se exponen algunos.
   a) Juan tiene $8.00. ¿Cuánto dinero necesita para comprar un radio de transistores cuyo costo es de $39.00?
   b) María tiene ahorrados $19.00 que es $\frac{1}{4}$ del costo de un tocadiscos que desea comprar. ¿Cuál es el costo del tocadiscos?
   c) En un juego de basquet la anotación final del equipo ganador fue menor de 26 puntos. Si hicieron siete tiros libres, que valen un punto cada uno. ¿Cuántos tiros regulares hicieron si valen dos puntos cada uno?
   d) En un examen se hacen preguntas que valen 1 punto y preguntas que valen $\frac{1}{2}$ punto, los alumnos obtuvieron puntuaciones que variaron entre 39 y 45 puntos inclusive. ¿Cuáles son las posibles puntuaciones que obtuvieron los alumnos?

Esta obra terminó de imprimirse el día 30 de noviembre de 1967, en los talleres de *Impresora de Libros*, Mesones número 62 letra E, México, D. F.
Se tiraron 6 000 ejemplares

su cátedra, como a los alumnos en su aprendizaje.
Los títulos de los cuadernos de esta colección son: 1. Conjuntos. 2. Números enteros. 3. Sistemas de numeración para los números enteros. 4. Algoritmos de las operaciones con números enteros. 5. Números y sus factores. 6. Números racionales. 7. Sistemas de numeración para los números racionales y 8. Proposiciones numéricas.